NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. LACOUR

Sur la surface de l'onde et la surface correspondante d'élasticité

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 362-369

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__362_1>

[$M^2 41$]

SUR LA SURFACE DE L'ONDE ET LA SURFACE CORRESPONDANTE D'ÉLASTICITÉ;

PAR M. E. LACOUR,
Professeur-adjoint à l'Université de Nancy.

1. La surface de l'onde et la surface correspondante d'élasticité peuvent être définies en même temps de la façon suivante :

Étant donné un trièdre trirectangle $Oxyz$, *on considère trois cercles* (A), (B), (C) *situés respectivement dans les faces* yOz, zOx, xOy *et ayant pour centre commun le sommet* O *du trièdre; par chacun de ces cercles on fait passer une sphère et l'on suppose que ces trois sphères varient de façon que,* P *et* M *étant leurs deux points communs,* OP *reste perpendiculaire* *sur* PM : le lieu du point M est la surface de l'onde, le lieu du point P est la surface correspondante d'élasticité.

Pour obtenir les équations de ces surfaces, prenons le trièdre $Oxyz$ comme trièdre de coordonnées. Soient

α et l le rayon du cercle (A) et l'x du centre de la sphère correspondante ;
β et m, γ et n les quantités analogues relatives aux cercles (B) et (C) ;
x, y, z, r les coordonnées du point M et la longueur OM ;
ξ, η, ζ, ρ les coordonnées du point P et la longueur OP.

On a d'abord les relations

$$\begin{aligned} r^2 - \alpha^2 &= 2lx, & \rho^2 - \alpha^2 &= 2l\xi, \\ r^2 - \beta^2 &= 2my, & \rho^2 - \beta^2 &= 2m\eta, \\ r^2 - \gamma^2 &= 2nz, & \rho^2 - \gamma^2 &= 2n\zeta, \end{aligned}$$

puis, en remarquant que le plan passant par les centres des trois sphères est perpendiculaire à PM et passe par le milieu de PM, on trouve qu'on doit avoir

$$\frac{x}{2l} + \frac{y}{2m} + \frac{z}{2n} = 1,$$
$$\frac{\xi}{l} + \frac{\eta}{m} + \frac{\zeta}{n} = 0;$$

enfin, en remplaçant dans ces relations l, m, n par leurs valeurs en fonction de x, y, z d'une part, en fonction de ξ, η, ζ d'autre part, on obtient les équations

$$\frac{x^2}{r^2 - \alpha^2} + \frac{y^2}{r^2 - \beta^2} + \frac{z^2}{r^2 - \gamma^2} = 1 \qquad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2),$$
$$\frac{\xi^2}{\rho^2 - \alpha^2} + \frac{\eta^2}{\rho^2 - \beta^2} + \frac{\zeta^2}{\rho^2 - \gamma^2} = 0 \qquad (\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2);$$

la première représente la surface de l'onde, et la deuxième, la surface correspondante d'élasticité.

On voit de plus que la correspondance entre les deux points M et P est définie par les relations

$$(\mathrm{M}, \mathrm{P}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{x}{r^2 - \alpha^2} &= \frac{\xi}{\rho^2 - \alpha^2}, \\ \frac{y}{r^2 - \beta^2} &= \frac{\eta}{\rho^2 - \beta^2}, \\ \frac{z}{r^2 - \gamma^2} &= \frac{\zeta}{\rho^2 - \gamma^2}, \end{aligned} \right.$$

relations qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{\xi - x}{\left(\dfrac{x}{r^2 - \alpha^2}\right)} = \frac{\eta - y}{\left(\dfrac{y}{r^2 - \beta^2}\right)} = \frac{\zeta - z}{\left(\dfrac{z}{r^2 - \gamma^2}\right)} = \rho^2 - r^2.$$

2. Nous allons démontrer que le point P est la projection du centre O sur le plan tangent en M à la surface de l'onde.

On sait (¹) que les coordonnées d'un point de la surface de l'onde peuvent s'exprimer au moyen de deux paramètres elliptiques u et v par les formules

$$\begin{aligned} x &= \beta \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{dn}(v, l), \\ y &= \alpha \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{cn}(v, l), \\ z &= \alpha \operatorname{dn}(u, k) \operatorname{sn}(v, l), \end{aligned}$$

le module k des fonctions elliptiques de l'argument u, le module l des fonctions elliptiques de l'argument v et les modules complémentaires étant définis par les égalités

$$k^2 = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\gamma^2 - \alpha^2}, \qquad k'^2 = \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma^2 - \alpha^2},$$

$$l^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\,\frac{(\gamma^2 - \beta^2)}{(\gamma^2 - \alpha^2)}, \qquad l'^2 = \frac{\gamma^2}{\beta^2}\,\frac{\beta^3 - \alpha^2}{\gamma^2 - \alpha^2}.$$

(¹) *Voir*, par exemple, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 271; 1898.

Pour abréger, nous désignerons par s, c, d les fonctions elliptiques de l'argument u et par s_1, c_1, d_1 les fonctions elliptiques de l'argument v.

Les lignes paramétriques $u =$ const. et $v =$ const. sont des biquadratiques : on s'assure aisément qu'elles sont orthogonales et que les lignes $u =$ const. sont tout entières situées sur des sphères ayant pour centre le point O : cela résulte des relations

$$x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v \equiv s c d s_1 c_1 d_1 (\alpha^2 k'^2 - \beta^2 l^2) \equiv 0,$$
$$x^3 + y^2 + z^2 = (\beta^2 - \alpha^2) s^2.$$

Cela posé, soient MT et MT$_1$ les tangentes menées en M aux lignes paramétriques $v =$ const. et $u =$ const. MT$_1$ est perpendiculaire à MT (on vient de le démontrer) et à OM, puisque la ligne paramétrique tangente à MT$_1$ est tracée sur une sphère de centre O ; MT$_1$ est donc perpendiculaire au plan de OM et de MT et *la droite* MT *est la projection orthogonale de* OM *sur le plan tangent en* M.

Je dis maintenant que le point P(ξ, η, ζ), dont la correspondance avec le point M(x, y, z) de la surface de l'onde est définie par les relations (M, P) du n° 1, se trouve sur la tangente MT à la ligne paramétrique $v =$ const. On a à vérifier

$$\frac{\xi - x}{x'_u} = \frac{\eta - y}{y'_u} = \frac{\zeta - z}{z'_u},$$

ou, d'après la dernière des relations rappelées,

$$(r^2 - \alpha^2)\frac{x'_u}{x} = (r^2 - \beta^2)\frac{y'_u}{y} = (r^2 - \gamma^2)\frac{z'_u}{z}.$$

Or on trouve aisément

$$r^2 - \alpha^2 = \quad (\beta^2 - \alpha^2) s^2, \qquad \frac{x'_u}{x} = \frac{cd}{s},$$
$$r^2 - \beta^2 = -(\beta^2 - \alpha^2) c^2, \qquad \frac{y'_u}{y} = -\frac{sd}{c},$$
$$r^2 - \gamma^2 = -\frac{(\beta^2 - \alpha^2)}{k^2} d^2, \qquad \frac{z'_u}{z} = -\frac{k^2 sc}{d}.$$

En portant ces valeurs dans les égalités à vérifier, on trouve que les trois expressions considérées ont pour valeur commune

$$(\beta^2 - \alpha^2)scd.$$

Il est donc démontré que le point P est sur MT; mais, par définition, OP est perpendiculaire sur la droite joignant le point M au point P, donc OP est la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente MT, et, puisque le plan OMT est perpendiculaire au plan tangent en M, on voit en définitive que P est le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur le plan tangent en M à la surface de l'onde, d'où le théorème suivant (démontré pour la première fois par le géomètre anglais Niven) :

Théorème. — *Si l'on fait passer une sphère par chacun des cercles* (A), (B), (C) *et par un point* M *de la surface de l'onde, le second point commun aux trois sphères ainsi determinées est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la surface sur le plan tangent en* M.

M. Darboux a traité (*Comptes rendus,* t. XCII, p. 446) le cas où les cercles (A), (B), (C) et le point O ont des positions quelconques, et il a montré, dans ce cas général, que l'on peut, avec la règle et le compas, déterminer les positions du point M situées sur le cercle, intersection d'une sphère quelconque passant par (A) et d'une sphère quelconque par (B). Le théorème précédent fournit une construction géométrique du plan tangent en un point donné de la surface de l'onde.

On a donc une définition géométrique de cette surface et de ses plans tangents, indépendante des propriétés des ellipsoïdes : on pourra voir dans la *Géométrie dans l'espace* de Rouché et Comberousse, n° 1229, une détermination des points coniques et des plans tangents singuliers de la surface, fondée sur ces principes.

Nous allons maintenant passer des résultats précédents aux propriétés de la surface de l'onde relatives à l'ellipsoïde d'élasticité de Fresnel.

3. Si M est un point de la surface de l'onde (définie comme au n° 1) et P le pied de la perpendiculaire abaissée du centre O sur le plan tangent en M, un plan mené par le centre et parallèle au plan tangent en M coupe l'ellipsoïde

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 = 1,$$

suivant une ellipse dont l'un des axes a pour direction la direction de MP et pour longueur l'inverse de la distance OP.

Pour le démontrer, considérons une sphère de centre O et de rayon égal à $\frac{1}{\text{OP}}$

$$\rho^2(x^2 + y^2 + z^2) = 1,$$

puis le cône ayant pour sommet l'origine et passant par l'intersection de cette sphère avec l'ellipsoïde

$$(\rho^2 - \alpha^2)\,\text{X}^2 + (\rho^2 - \beta^2)\,\text{Y}^2 + (\rho^2 - \gamma^2)\,\text{Z}^2 = 0,$$

et rappelons-nous (n° 1) que la droite MP a pour paramètres directeurs

$$\frac{\xi}{\rho^2 - \alpha^2}, \quad \frac{\eta}{\rho^2 - \beta^2}, \quad \frac{\zeta}{\rho^2 - \gamma^2}.$$

On voit que la parallèle à MP menée par l'origine est sur le cône, puisque les coordonnées ξ, η, ζ du point P satisfont à la condition

$$\frac{\xi^2}{\rho^2 - \alpha^2} + \frac{\eta^2}{\rho^2 - \beta^2} + \frac{\zeta^2}{\rho^2 - \gamma^2} = 0.$$

puis, en formant l'équation du plan tangent au cône le long de cette génératrice, on trouve

$$\xi X + \eta Y + \zeta Z = 0,$$

c'est-à-dire l'équation du plan mené par O perpendiculaire à OP.

On conclut de là que *la parallèle à* MP *menée par* O *est un axe de la section de l'ellipsoïde par un plan passant par le centre et parallèle au plan tangent en* M *et, en outre, que la longueur de cet axe est égale à* $\frac{1}{\text{OP}}$; c'est ce qu'il fallait démontrer.

4. Appelons *direction de la vibration* (de Fresnel) en un point M de la surface de l'onde la projection de OM sur le plan tangent en M.

Il résulte de ce qui précède que, si l'on considère deux plans tangents à la surface de l'onde, parallèles et non symétriques par rapport au centre, les directions des vibrations dans ces deux plans sont rectangulaires; de plus, les plans menés par O, perpendiculaires à ces plans tangents et respectivement parallèles aux directions correspondantes des vibrations sont deux plans rectangulaires.

Appelons encore *ligne de vibration* [1] une ligne tracée sur la surface de l'onde et telle que, en chaque point de cette ligne, la direction de la tangente est celle de la vibration en ce point.

On voit que, *si la surface est représentée par les*

---

[1] Cette dénomination est employée par Tait, qui détermine ces lignes et leurs trajectoires orthogonales à l'aide du calcul des quaternions (Tait, *Traité élémentaire des quaternions*, Gauthier-Villars, 1884).

Voir aussi le *Traité de Géometrie cinématique* de M. Mannheim.

formules

$$x = \beta\,\mathrm{sn}(u, k)\,\mathrm{dn}(v, l),$$
$$y = \alpha\,\mathrm{cn}(u, k)\,\mathrm{cn}(v, l),$$
$$z = \alpha\,\mathrm{dn}(u, k)\,\mathrm{sn}(v, l),$$

les lignes de vibration sont les lignes $v =$ const., *et leurs trajectoires orthogonales sont les lignes* $u =$ const.

Ces propriétés donnent une interprétation physique des lignes paramétriques dans la représentation précédente de la surface de l'onde au moyen des fonctions elliptiques.