EDM. LANDAU

Sur les conditions de divisibilité d'un produit de factorielles par un autre

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 344-362

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__344_1>

[I2e]

SUR LES CONDITIONS DE DIVISIBILITÉ D'UN PRODUIT DE FACTORIELLES PAR UN AUTRE;

PAR M. EDM. LANDAU,
Docteur en Philosophie, à Berlin.

INTRODUCTION.

On sait que le coefficient du binome

$$\binom{a}{b} = \frac{a(a-1)\ldots(a-b+1)}{1, 2, \ldots, b} = \frac{a!}{(a-b)!\,b!}$$

est un nombre entier pour tous les systèmes (a, b), pour lesquels $a - b$ et b sont $\geqq 0$, le symbole $0!$ signifiant 1 par convention. Si l'on pose

$$a - b = x_1, \qquad b = x_2,$$

on obtient la fraction

$$\frac{(x_1 + x_2)!}{x_1!\,x_2!},$$

qui est entière pour tous les systèmes $(x_1, x_2) \geqq 0$. De même, le coefficient du polynome

$$\frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)!}{x_1!\,x_2!\ldots x_r!}$$

est entier pour tous les systèmes $(x_1, x_2, \ldots, x_r) \geqq 0$ (1), ce qui se démontre au moyen de la proposition connue, que l'exposant dont le nombre premier p est affecté dans la factorielle $n!$, égale

$$(1) \qquad \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^\nu}\right] \quad (2),$$

formule où $[m]$ désigne le plus grand nombre entier non supérieur à m. Il est connu depuis longtemps que les coefficients du polynome sont des nombres entiers; car ils indiquent des nombres de permutations de $x_1 + \ldots + x_r$ éléments, parmi lesquels il s'en trouve x_1 égaux, x_2 autres égaux, etc.

En 1874, Catalan (3) publia un théorème auquel il

---

(1) *Voir*, par exemple, DIRICHLET-DEDEKIND, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 4e édition, p. 28-29; 1894.

(2) La somme n'a qu'un nombre fini de termes, savoir $\left[\frac{\log n}{\log p}\right]$; cependant, comme $[m] = 0$ pour $0 \leqq m < 1$, on peut l'étendre jusqu'à $\nu = \infty$.

(3) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XIII, p. 207; 1874.

avait été conduit par la théorie des fonctions elliptiques : le quotient

$$\frac{2x_1!.2x_2!}{x_1!\,x_2!\,(x_1+x_2)!}$$

est entier pour tous les systèmes $(x_1, x_2) \geqq 0$. En s'appuyant sur la formule (1), M. Bourguet [1] démontre ce théorème d'une manière élémentaire [2], de même qu'une autre proposition plus générale : la fraction

$$\frac{(rx_1)!(rx_2)!\ldots(rx_r)!}{x_1!\,x_2!\ldots x_r!\,(x_1+x_2+\ldots+x_r)!}$$

est entière pour tous les systèmes $(x_i) \geqq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

Dans ce qui suit, il s'agit de ce problème : Étant données $m+n$ fonctions linéaires et homogènes de r variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$, à coefficients entiers,

$$u_\sigma = \alpha_1^{(\sigma)} x_1 + \ldots + \alpha_r^{(\sigma)} x_r = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^{(\sigma)} x_i \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, m),$$

$$v_\tau = \beta_1^{(\tau)} x_1 + \ldots + \beta_r^{(\tau)} x_r = \sum_{i=1}^{r} \beta_i^{(\tau)} x_i \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, n),$$

trouver les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles les $(m+n)r$ coefficients $\alpha_i^{(\sigma)}$, $\beta_i^{(\tau)}$ doivent satisfaire, pour que la fraction

$$\frac{(\alpha_1^{(1)} x_1 + \ldots + \alpha_r^{(1)} x_r)!\ldots(\alpha_1^{(m)} x_1 + \ldots + a_r^{(m)} x_r)!}{(\beta_1^{(1)} x_1 + \ldots + \beta_r^{(1)} x_r)!\ldots(\beta_1^{(n)} x_1 + \ldots + \beta_r^{(n)} x_r)!} = \frac{u_1!\,u_2!\ldots u_m!}{v_1!\,v_2!\ldots v_n!},$$

soit égale à un nombre entier, pour tout système $x_1, x_2, \ldots, x_r$ qui donne aux $m+n$ fonctions u_σ, v_τ des valeurs $\geqq 0$ [3].

---

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XIV, p. 89-90; 1875.

(2) *Voir* aussi BACHMANN, *Zahlentheorie*, Ire Partie, p. 37-39.

(3) Pour des valeurs négatives, les factorielles n'auraient pas de sens.

I.

Pour que le produit $\prod_\sigma u_\sigma!$ soit divisible par $\prod_\tau v_\tau!$, il faut et il suffit que chaque nombre premier p divise le numérateur au moins autant de fois que le dénominateur; on a donc à étudier l'inégalité

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{u_1}{p^\nu}\right]+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{u_2}{p^\nu}\right]+\ldots+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{u_m}{p^\nu}\right]$$
$$\geqq\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{v_1}{p^\nu}\right]+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{v_2}{p^\nu}\right]+\ldots+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{v_n}{p^\nu}\right],$$

c'est-à-dire

$$(2)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\sigma=1}^{m}\left[\frac{u_\sigma}{p^\nu}\right]\geqq\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\tau=1}^{n}\left[\frac{v_\tau}{p^\nu}\right],$$

qui doit subsister pour tous les systèmes entiers $x_1, \ldots, x_r$ pour lesquels les u_σ et v_τ sont $\geqq 0$, et pour tout nombre premier p.

Dans les cas spéciaux mentionnés dans l'Introduction [1], on s'est servi des inégalités correspondant à (2) pour les systèmes spéciaux de coefficients $(\alpha_i^{(\sigma)}, \beta_i^{(\tau)})$. En ce qui concerne le coefficient du polynome, on a dû montrer que, pour tous les $x_1, \ldots, x_r \geqq 0$ et pour tout nombre premier p,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{x_1+\ldots+x_r}{p^\nu}\right]\geqq\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{x_1}{p^\nu}\right]+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{x_2}{p^\nu}\right]+\ldots+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{x_r}{p^\nu}\right];$$

---

[1] *Voir* aussi plusieurs Mémoires de M. Désiré André (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2ᵉ série, t. XI, p. 314; t. XII, p. 84; t. XIII, p. 185. — *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. I, p. 84).

pour l'expression considérée par M. Bourguet

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{rx_1}{p^\nu}\right]+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{rx_2}{p^\nu}\right]+\ldots+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{rx_r}{p^\nu}\right]$$
$$\geqq\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{x_1}{p^\nu}\right]+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{x_2}{p^\nu}\right]+\ldots+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{x_r}{p^\nu}\right]+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{x_1+x_2+\ldots+x_r}{p^\nu}\right].$$

La démonstration de ces inégalités se fait en établissant que, pour chaque nombre d, donc, *a fortiori*, pour $d=p^\nu$, on a

$$\left[\frac{x_1+\ldots+x_r}{d}\right]\geqq\left[\frac{x_1}{d}\right]+\ldots+\left[\frac{x_r}{d}\right],$$
$$\left[\frac{rx_1}{d}\right]+\ldots+\left[\frac{rx_r}{d}\right]\geqq\left[\frac{x_1}{d}\right]+\ldots+\left[\frac{x_r}{d}\right]+\left[\frac{x_1+\ldots+x_r}{d}\right];$$

et d'une inégalité de la forme

(3) $$f(\nu)\geqq g(\nu),$$

on déduit ensuite, *a fortiori*,

(4) $$\sum_{\nu=1}^{\infty}f(\nu)\geqq\sum_{\nu=1}^{\infty}g(\nu).$$

Il peut arriver, inversement, que, pour un certain système $(x_1, \ldots, x_r, p)$, on ait, pour un ν_0 déterminé,

(5) $$\sum_{\sigma=1}^{m}\left[\frac{u_\sigma}{p^{\nu_0}}\right]<\sum_{\tau=1}^{n}\left[\frac{v_\tau}{p^{\nu_0}}\right],$$

et pourtant

(2) $$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\sigma=1}^{m}\left[\frac{u_\sigma}{p^\nu}\right]\geqq\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\tau=1}^{n}\left[\frac{v_\tau}{p^\nu}\right],$$

vu que le sens d'une inégalité contenant la fonction $[x]$

$$[a_1]+\ldots+[a_m]<[b_1]+\ldots+[b_n],$$

où les a, b sont des nombres fractionnaires, peut se renverser en multipliant tous les arguments a_σ, b_τ par une même constante k.

Mais, ce qu'on n'a pas remarqué jusqu'ici, c'est que l'existence de la relation

$$\sum_{\sigma=1}^{m}\left[\frac{u_\sigma}{p^\nu}\right] \geqq \sum_{\tau=1}^{n}\left[\frac{v_\tau}{p^\nu}\right]$$

pour tous les systèmes (x_i, p, ν), est non seulement suffisante, mais aussi nécessaire pour que la condition (2) soit remplie pour tous les systèmes $(x_1, \ldots, x_r, p)$. Il est vrai que (5) n'entraînerait pas nécessairement que, pour le nombre p en question, l'inégalité (2) ne soit pas satisfaite; mais, et c'est la marche suivie dans la démonstration qui forme l'objet du n° II, en supposant qu'il existe un système $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$ et une puissance P d'un nombre premier [1], pour lesquels

$$(6) \qquad \sum_{\sigma=1}^{m}\left[\frac{u_\sigma}{\sigma}\right] < \sum_{\tau=1}^{n}\left[\frac{v_\tau}{\sigma}\right],$$

je montrerai qu'on pourrait en déduire un autre système $(y_1, y_2, \ldots, y_r, p)$, pour lequel

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\sigma=1}^{m}\left[\frac{u_\sigma}{p^\nu}\right] < \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\tau=1}^{n}\left[\frac{v_\tau}{p^\nu}\right],$$

et j'aurai démontré ainsi la proposition suivante :

Pour que l'inégalité (2) subsiste identiquement, il faut qu'on ait identiquement

$$\sum_{\sigma=1}^{m}\left[\frac{u_\sigma}{p^\nu}\right] \geqq \sum_{\tau=1}^{n}\left[\frac{v_\tau}{p^\nu}\right] \quad [2].$$

---

[1] P peut signifier, du reste, une grandeur positive quelconque, rationnelle ou irrationnelle.

[2] Vulgairement parlant, il est permis de différentier l'inégalité (2).

II.

Les u_σ, v_τ étant des fonctions homogènes et linéaires des x_i, on a

$$u_\sigma(\rho x_1, \ldots, \rho x_r) = \rho u_\sigma(x_1, \ldots, x_r),$$
$$v_\tau(\rho x_1, \ldots, \rho x_r) = \rho v_\tau(x_1, \ldots, x_r).$$

[Si ρ est positif, les $u_\sigma(\rho x_i)$ (¹) et $v_\tau(\rho x_i)$ seront $\gtreqless 0$ en même temps que les $u_\sigma(x_i)$, $v_\tau(x_i)$]. On a donc, en posant

$$U_\sigma = u_\sigma(\rho\xi_i),$$
$$V_\tau = v_\tau(\rho\xi_i),$$

et en introduisant ces expressions dans (6),

$$(7) \qquad \sum_{\sigma=1}^{m} \left| \frac{U_\sigma}{\rho P} \right| = \sum_{\tau=1}^{n} \left| \frac{V_\tau}{\rho P} \right|.$$

Ayant une fraction $\frac{\alpha}{\beta}$ $(\alpha, \beta > 0)$ on peut multiplier ses deux termes par un nombre positif ρ tel que le numérateur devienne plus petit que la deuxième puissance du dénominateur diminué de β. Car, pour

$$\rho = \frac{\alpha + 2\beta^2}{\beta^2},$$

on a, comme on le vérifie facilement,

$$\rho\alpha < (\rho\beta - \beta)^2.$$

Si plusieurs fractions

$$\frac{\alpha_1}{\beta}, \quad \frac{\alpha_2}{\beta}, \quad \ldots, \quad \frac{\alpha_\tau}{\beta}$$

sont données, on obtient, en multipliant les deux

(¹) $u_\sigma(\rho x_i)$ signifie $u_\sigma(\rho x_1, \ldots, \rho x_r) \ldots$

termes de chacune par un nombre supérieur aux t nombres $\frac{\alpha\mu + 2\beta^2}{\beta^2}$, des fractions où le numérateur de chacune est inférieur à la deuxième puissance du dénominateur diminuée du dénominateur primitif. Il existe donc un nombre ρ_1 tel que pour tout $\rho > \rho_1$,

$$U_\sigma < (\rho P - P)^2 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, m),$$

et

$$V_\tau < (\rho P - P)^2 \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, n).$$

Si y, en augmentant, passe par une valeur entière N, la fonction discontinue (y) augmente de 1. Comme, pour N elle-même,

$$(y) = N,$$

on voit que, y étant une valeur quelconque, on peut trouver une grandeur positive ε différente de 0, telle que pour $0 \leqq h < \varepsilon$,

$$(y + h) = (y).$$

En effet, il suffit de prendre

$$\varepsilon = (y) + 1 - y,$$

expression positive pour tous les y. De même, une fraction $\frac{\alpha}{\beta}$ étant donnée, on peut trouver un nombre positif δ tel que pour $0 \leqq k < \delta$,

$$\left(\frac{\alpha}{\beta - k}\right) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

D'après ce qui précède, en posant

$$y = \frac{\alpha}{\beta}, \qquad y + h = \frac{\alpha}{\beta - k},$$

il suffit de prendre

$$\frac{\alpha}{\beta - \delta} - \frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + 1 - \frac{\alpha}{\beta}, \qquad \delta = \beta - \frac{\alpha}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + 1},$$

grandeur toujours plus grande que 0.

Donc, une grandeur positive d étant donnée, on peut trouver un nombre ρ_1 tel que, pour tous les $\rho > \rho_1$,

$$\left(\frac{\rho\alpha}{\rho\beta - d}\right) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \quad ([1]).$$

En effet, il suffit pour cela que

$$\frac{d}{\rho_1} = \beta - \frac{\alpha}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + 1}.$$

Donc, t fractions $\frac{\alpha_1}{\beta}, \frac{\alpha_2}{\beta}, \ldots, \frac{\alpha_\tau}{\beta}$ étant données, on peut choisir un nombre ρ_2 tel que pour $\rho > \rho_2$,

$$\left(\frac{\rho\alpha_1}{\rho\beta - d}\right) = \left(\frac{\alpha_1}{\beta}\right), \qquad \ldots, \qquad \left(\frac{\rho\alpha_\tau}{\rho\beta - d}\right) = \left(\frac{\alpha_\tau}{\beta}\right),$$

relation où d désigne une grandeur positive donnée.

En posant $\beta = d = p$, et en tenant compte des considérations auxiliaires présentées plus haut, on obtient cette proposition : Il existe un nombre ρ_3 tel que pour

$$\rho > \rho_3,$$

(1) $$U_\sigma < (\rho P - P)^2, \qquad V_\tau < (\rho P - P)^2:$$

a fortiori donc pour $q < P$,

$$U_\sigma < (\rho P - q)^2, \qquad V_\tau < (\rho P - q)^2;$$

(2) $$\left(\frac{U_\sigma}{\rho P - P}\right) = \left(\frac{U_\sigma}{\rho P}\right), \qquad \left(\frac{V_\tau}{\rho P - P}\right) = \left(\frac{V_\tau}{\rho P}\right);$$

a fortiori donc

$$\left(\frac{U_\sigma}{\rho P - q}\right) = \left(\frac{U_\sigma}{\rho P}\right), \qquad \left(\frac{V_\tau}{\rho P - q}\right) = \left(\frac{V_\tau}{\rho P}\right).$$

([1]) Il n'est pas toujours possible de déterminer ρ suffisamment grand pour que

$$\left(\frac{\rho\alpha}{\rho b + d}\right) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right);$$

car, dans le cas où $\frac{\alpha}{\beta}$ est entier, cette équation n'est jamais satisfaite.

Or,

$$\rho P - q \qquad (\rho = 1, 2, 3, \ldots; 0 \leqq q < P)$$

parcourt toutes les grandeurs positives. Il existe donc, en désignant par p un nombre premier quelconque supérieur à $\rho_3 P - P$, un nombre premier p tel que

(1) $$U_\sigma < p^2, \qquad V_\tau < p^2,$$

(2) $$\left(\frac{U_\sigma}{\rho P}\right) = \left(\frac{U_\sigma}{p}\right), \qquad \left(\frac{V_\tau}{\rho P}\right) = \left(\frac{V_\tau}{p}\right),$$

De

$$\sum_{\sigma=1}^{m} \left(\frac{U_\sigma}{\rho P}\right) < \sum_{\tau=1}^{n} \left(\frac{V_\tau}{\rho P}\right),$$

il s'ensuit donc que, dans les sommes $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{U_\sigma}{p^\nu}\right)$, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{V_\tau}{p^\nu}\right)$, tous les termes, excepté les premiers, s'évanouissent; on a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^{m} \left(\frac{U_\sigma}{p^\nu}\right) < \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\tau=1}^{n} \left(\frac{V_\tau}{p^\nu}\right),$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^{m} \left[\frac{u_\sigma(\rho\xi_i)}{p^\nu}\right] < \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\tau=1}^{n} \left[\frac{v_\tau(\rho\xi_i)}{p^\nu}\right],$$

et la proposition énoncée plus haut est démontrée.

III.

On en conclut, en posant

$$\frac{x_1}{P} = y_1, \qquad \frac{x_2}{P} = y_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{x_\nu}{P} = y_\nu,$$

la proposition suivante :

Pour que la fraction

$$\frac{u_1!\, u_2!\, \ldots\, u_m!}{v_1!\, v_2!\, \ldots\, v_n!}$$

se réduise, pour tous les systèmes (x_i) tels que

$$u_\sigma \geqq 0, \qquad v_\tau \geqq 0 \qquad \begin{pmatrix}\sigma = 1, 2, \dots, m\\ \tau = 1, 2, \dots, n\end{pmatrix},$$

à un nombre entier, il faut et il suffit que l'inégalité

$$(8) \qquad \sum_{\sigma=1}^{m} [u_\sigma(y_i)] \geqq \sum_{\tau=1}^{n} [v_\tau(y_i)]$$

soit vérifiée pour tous les systèmes commensurables ([1]) de grandeurs réelles (y_i), pour lesquels les u_σ et v_τ sont $>$ o.

La restriction que les y sont commensurables peut aussi être écartée. En effet, supposons que, pour un système réel quelconque (y_i) pour lequel les u_σ et v_τ sont $>$ o, on ait

$$\sum_{\sigma=1}^{m} [u_\sigma(y_i)] < \sum_{\tau=1}^{n} [v_\tau(y_i)].$$

D'après les considérations précédentes, on peut trouver une grandeur positive δ telle que pour

$$0 \leqq h_i < \delta \qquad (i = 1, 2, \dots, r),$$

$$\left[\frac{u_\sigma(y_i)}{1 - h_i}\right] = [u_\sigma(y_i)], \qquad \left[\frac{v_\tau(y_i)}{1 - h_i}\right] = [v_\tau(y_i)] \qquad \begin{pmatrix}\sigma = 1, 2, \dots, m\\ \tau = 1, 2, \dots, n\end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\left[u_\sigma\left(\frac{y_i}{1 - h_i}\right)\right] = [u_\sigma(y_i)], \qquad \left[v_\tau\left(\frac{y_i}{1 - h_i}\right)\right] = [v_\tau(y_i)],$$

$$\sum_{\sigma=1}^{m} \left[u_\sigma\left(\frac{y_i}{1 - h_i}\right)\right] = \sum_{\sigma=1}^{m} [u_\sigma(y_i)] < \sum_{\tau=1}^{n} [v_\tau(y_i)]$$
$$= \sum_{\tau=1}^{n} \left[v_\tau\left(\frac{y_i}{1 - h_i}\right)\right],$$

([1]) C'est-à-dire tels qu'il existe un nombre pour lequel $y_1 P = x_1, \dots, y_r P = x_r$, soient entiers et l'on peut choisir les h_i entre o et δ, tels que les r nombres

$$\eta_i = \frac{y_i}{1 - h_i}$$

soient commensurables ou même rationnels avec une puissance d'un nombre premier comme dénominateur commun; une contradiction avec la proposition trouvée plus haut se présenterait donc; on a, par conséquent, cet énoncé : L'existence de l'inégalité

$$\sum_{\sigma=1}^{m} [u_\sigma(y_i)] \geqq \sum_{\tau=1}^{n} [v_\tau(y_i)], \tag{8}$$

pour tous les systèmes réels (y_i) tels que les u_σ, v_τ sont $\geqq$ o, est une condition nécessaire et suffisante pour que le quotient de factorielles considéré soit entier.

IV.

Soit maintenant (y_i) une solution quelconque de (8) $(u_\sigma, v_\tau \geqq 0)$ et (η_i) une autre $(u_\sigma, v_\tau \geqq 0)$, dont les éléments sont tous entiers et différents de o. Dans

$$\sum_{\sigma=1}^{m} [u_\sigma(\eta_i)] \geqq \sum_{\tau=1}^{n} [v_\tau(\eta_i)],$$

on peut, tous les arguments étant entiers, omettre les crochets. En multipliant par un nombre entier et positif k, on a donc

$$\sum_{\sigma=1}^{m} u_\sigma(k\eta_i) \geqq \sum_{\tau=1}^{n} v_\tau(k\eta_i).$$

et en ajoutant à

$$\sum_{\sigma=1}^{m} [u_\sigma(y_i)] \geqq \sum_{\tau=1}^{n} [v_\tau(y_i)],$$

vu que, pour b entier,

$$(a)+b=(a+b),$$

on obtient

$$\sum_{\sigma=1}^{m}[u_\sigma(y_i+k\eta_i)] \geq \sum_{\tau=1}^{n}[v_\tau(y_i+k\eta_i)].$$

De là cet énoncé : Si l'inégalité (8) est exacte pour tous les systèmes (y_i) tels que y_i parcourt les valeurs comprises entre deux multiples consécutifs $h_i\eta_i$, $(h_i+1)\eta_i$ de η_i, elle l'est pour tous les systèmes (y_i) de la forme

$$y_i=h_i\eta_i+\delta_i\eta_i+k\eta_i \qquad (0\leqq\delta_i\leqq 1,\ k \text{ entier et } \geqq 0),$$

c'est-à-dire pour tous les $y_i > h_i\eta_i$, si $\eta_i>0$ et $\leqq h_i\eta_i$, si $\eta_i<0$ $(i=1, 2, \ldots, r)$.

Je suppose maintenant que les u_σ, v_τ sont $\geqq 0$ pour tous les arguments qui sont $\geqq 0$. Les coefficients seront alors tous $\geqq 0$; car si, par exemple, $\alpha_i^{(\sigma)}$ était négatif, on aurait, pour

$$x_1=\ldots=x_{i-1}=x_{i+1}=\ldots=x_n=0, \qquad x_i=1,$$
$$u_i^{(\sigma)}<0.$$

Les considérations précédentes permettent de démontrer le théorème suivant :

Pour que

$$\frac{(\alpha_1^{(1)}x_1+\ldots+\alpha_r^{(1)}x_r)!\ldots(\alpha_1^{(m)}x_1+\ldots+\alpha_r^{(m)}x_r)!}{(\beta_1^{(1)}x_1+\ldots+\beta_r^{(1)}x_r)!\ldots(\beta_1^{(n)}x_1+\ldots+\beta_r^{(n)}x_r)!} \qquad (\alpha_i^{(\sigma)}\geqq 0,\ \beta_i^{(\tau)}\geqq 0)$$

soit entier pour tous les systèmes entiers $(x_i)\geqq 0$, *il faut et il suffit que l'inégalité*

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l}[\alpha_1^{(1)}y_1+\ldots+\alpha_r^{(1)}y_r]+\ldots+[\alpha_1^{(m)}y_1+\ldots+\alpha_r^{(m)}y_r]\\ \quad \geqq[\beta_1^{(1)}y_1+\ldots+\beta_r^{(1)}y_r]+\ldots+[\beta_1^{(n)}y_1+\ldots+\beta_r^{(n)}y_r]\end{array}\right.$$

subsiste pour tous les systèmes réels (y_i) *entre* o *et* 1 (*inclusivement*).

Démonstration. — Si le quotient de factorielles en question est entier pour tous les systèmes entiers $(x_i) \geqq 0$, l'inégalité (8) est exacte pour tous les systèmes $\geqq 0$ et réciproquement. Ceci n'est pas une conséquence du théorème général établi à la fin de (III) ([1]), mais se démontre littéralement de la même manière, en se bornant dès le commencement aux systèmes positifs; car le système $(\rho\xi_i)$, qu'on a déduit (II) de (ξ_i) et qui ne satisferait pas à (2) est $\geqq 0$ en même temps que (ξ_i).

1. Si le quotient en question est entier pour tous les $(x_i) \geqq 0$, l'inégalité (8) sera donc, *a fortiori*, exacte pour tous les (y_i) entre o et 1.

2. Réciproquement, supposons que tous les systèmes (y_i) entre o et 1 satisfassent à (8). En posant

$$y_1 = \ldots = y_{i-1} = y_{i+1} = \ldots = y_n = 0, \qquad y_i = 1,$$

on a

$$\alpha_i^{(1)} + \ldots + \alpha_i^{(m)} \geqq \beta_i^{(1)} + \ldots + \beta_i^{(n)},$$

$$\sum_{\sigma=1}^{m} \alpha_i^{(\sigma)} \geqq \sum_{\tau=1}^{n} \beta_i^{(\tau)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r);$$

donc, $k_1, \ldots, k_r$ désignant des nombres entiers quelconques $\geqq 0$,

$$\sum_{\sigma=1}^{m} \alpha_i^{(\sigma)} k_i \geqq \sum_{\tau=1}^{n} \beta_i^{(\tau)} k_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

$$\sum_{\sigma=1}^{m} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^{(\sigma)} k_i \geqq \sum_{\tau=1}^{n} \sum_{i=1}^{r} \beta_i^{(\tau)} k_i,$$

([1]) Dans le cas où il y a, pour chaque variable, au moins un u_σ ou v_τ qui ne contient qu'elle seule, ces deux théorèmes sont identiques, car les u_σ, v_τ ne sauraient être tous $\geqq 0$ sans que les x_i le soient aussi.

et en ajoutant cette inégalité à (8), pour tous les systèmes (y_i) entre o et 1,

$$\sum_{\sigma=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{r}\alpha_i^{(\sigma)}k_i+\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i^{(\sigma)}y_i\right)\right]$$

$$\leqq\sum_{\tau=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{r}\beta_i^{(\tau)}k_i+\left(\sum_{i=1}^{r}\beta_i^{(\tau)}y_i\right)\right],$$

d'où, comme les sommes $\sum_i \alpha_i^{(\sigma)}k_i$ et $\sum_i \beta_i^{(\tau)}k_i$ représentent des nombres entiers,

$$\sum_{\sigma=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{r}\alpha_i^{(\sigma)}(k_i+y_i)\right]\leqq\sum_{\tau=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{r}\beta_i^{(\tau)}(k_i+y_i)\right];$$

or, chaque grandeur positive est de la forme k_i+y_i, où k_i est entier et $0\leqq y_i<1$. Donc, l'inégalité (8) reste vraie pour tous les systèmes $(y_i)\geqq 0$. Donc, le quotient $\dfrac{\prod_\sigma u_\sigma!}{\prod_\tau v_\tau!}$ est entier pour tous les (x_i) entiers $\geqq 0$, ce qu'il fallait démontrer.

V.

Pour appliquer le théorème trouvé, je traiterai, dans un cas spécial, le problème qui consiste, étant donnés les nombres m, n, r et les coefficients $\beta_i^{(\tau)}\begin{pmatrix} i=1,2,\ldots,r \\ \tau=1,2,\ldots,n\end{pmatrix}$ du dénominateur, à trouver tous les systèmes $\alpha_i^{(\sigma)}$ tels que le quotient $\dfrac{u_1!\ldots u_m!}{v_1!\ldots v_n!}$ soit identiquement entier. Il est évident que, si un système $(\alpha_i^{(\sigma)})$ satisfait aux conditions exigées et qu'on augmente un ou plusieurs des $\alpha_i^{(\sigma)}$, le nouveau système y satisfera *a fortiori*. On n'a donc qu'à déterminer tous les systèmes, *indépendants* $(\alpha_i^{(\sigma)})$, pour lesquels :

1. $\prod_\sigma u_\sigma!$ est divisible par $\prod_\tau \nu_\tau!$

2. On ne peut diminuer aucun des coefficients positifs de 1 sans que cette divisibilité cesse.

Soit

$$m = 2, \qquad n = y, \qquad r = 2,$$

$$\beta_1^{(1)} = 1, \qquad \beta_2^{(1)} = 0, \qquad \beta_1^{(2)} = 0, \qquad \beta_2^{(2)} = 1,$$
$$\beta_1^{(3)} = 2, \qquad \beta_2^{(3)} = 1, \qquad \beta_1^{(4)} = 1, \qquad \beta_2^{(4)} = 2.$$

Il s'agit donc de trouver tous les nombres entiers $\geqq 0$ a, b, c, d tels que pour $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} [ax + by] + [cx + dy] \\ \quad \geqq [x] + [y] + [2x + y] + [x + 2y]. \end{array} \right.$$

$x = 1$, $y = 0$ donne

$$(10) \qquad a + c \geqq 4;$$

$x = 0$, $y = 1$ donne

$$(11) \qquad b + d \geqq 4$$

comme conditions nécessaires.

Pour $x = 1$, $y = 1$, l'inégalité (9) est donc satisfaite. Pour $x = 1$, $y < 1$, (9) prendra la forme

$$a + c + [by] + [dy] \geqq 4 + [2y],$$

conséquence immédiate de (10) et (11), un des nombres b et d, au moins, devant être, à cause de (11), $\geqq 2$. De même $x < 1$, $y = 1$ ne donnera aucune nouvelle condition. Comme, pour $x < 1$ et $y < 1$, $[x]$ et $[y]$ sont 0, on est donc ramené aux inégalités

$$(10)\qquad a+c\geqq 4,$$

$$(11)\qquad b+d\geqq 4,$$

$$(12)\qquad [ax+by]+[cx+dy]\geqq[2x+y]+[x+2y]$$
$$(0\leqq x<1,\ 0\leqq y<1).$$

Pour parvenir à leur résolution, il y a lieu de trouver d'abord tous les systèmes a, b, c, d pour lesquels elles sont satisfaites pour

$$0\leqq x\leqq y<1.$$

Après cela, un changement de lettres donnera ceux qui satisfont aux inégalités pour

$$0\leqq y\leqq x<1;$$

et l'on aura à conserver tous les systèmes appartenant à la fois à ces deux groupes.

En faisant augmenter x et y, le deuxième membre de (12) n'augmente que si l'une des expressions $2x+y$, $x+2y$ passe par une valeur entière; il faut et il suffit donc (en se bornant à $x<y$) que, outre (10) et (11),

$$[ax+by]+[cx+dy]\geqq\begin{cases}1 & \text{pour}\quad x+2y=1\\ 2 & \text{pour}\quad 2x+y=1\\ 3 & \text{pour}\quad x+2y=2\\ 4 & \text{pour}\quad 2x+y=2\end{cases}\qquad(0\leqq x\leqq y<1).$$

En éliminant x de la première de ces inégalités et de la troisième, y des deuxième et quatrième et en posant ensuite, respectivement, y et $x=\Im$, on obtient, outre (10) et (11),

$$(13)\qquad a+c+[(b-2a)\Im]+[(d-2c)\Im]\geqq 1 \text{ pour } \tfrac{1}{3}\leqq\Im\leqq\tfrac{1}{2},$$

$$(14)\qquad b+d+[(a-2b)\Im]+[(c-2d)\Im]\geqq 2 \text{ pour } 0\leqq\Im\leqq\tfrac{1}{3},$$

$$(15)\qquad 2a+2c+[(b-2a)\Im]+[(d-2c)\Im]\geqq 3 \text{ pour } \tfrac{2}{3}\leqq\Im<1,$$

$$(16)\qquad 2b+2d+[(a-2b)\Im]+[(c-2d)\Im]\geqq 4 \text{ pour } \tfrac{1}{2}\leqq\Im\leqq\tfrac{2}{3}.$$

La discussion de ces quatre inégalités donne le résultat suivant : elles sont satisfaites pour tout système vérifiant (11) et (12), à l'exception de

$$a = 3, \qquad b = 0, \qquad c = 1, \qquad d = 4.$$

et

$$a = 1, \qquad b = 4, \qquad c = 3, \qquad d = 0.$$

En opérant maintenant suivant les indications qui viennent d'être données, on obtient, comme solution générale du problème proposé, le résultat que voici.

a, b, c, d sont respectivement supérieurs ou égaux à l'un des quatre systèmes 3, 0, 1, 5 ; 1, 5, 3, 0 ; 0, 3, 5, 1 ; 5, 1, 3, 0 ou à l'un des $5.5 - 4 = 21$ systèmes a, b, c, d pour lesquels

$$a + c = 4, \qquad b + d = 4 \qquad (a, b, c, d \geq 0)$$

(mais où a, b, c, d ne sont pas respectivement égaux à un des quatre systèmes 3, 0, 1, 4 ; 1, 4, 3, 0 ; 0, 3, 4, 1 ; 4, 1, 3, 0).

La plupart de ces 25 solutions (parmi lesquelles il n'y en a que 9 qui soient différentes entre elles, vu les changements permis de lettres) ne disent rien de nouveau ; en effet, il est évident que $(ax + by)!\,(cx + dy)!$ est divisible par $x!\,y!\,(2x + y)!\,(x + 2y)!$, si $ax + by$ est la somme de une, de deux, de trois ou de toutes les quantités x, y, $2x + y$, $x + 2y$ ou égal à 0, tandis que $cx + dy$ est la somme de celles qui ne sont pas contenues dans $ax + by$; car le quotient de factorielles considéré est alors le produit de deux coefficients du polynome, donc entier. Cela donne déjà 15 systèmes indépendants.

Ensuite, par le théorème de Catalan cité dans l'Introduction, $4x + 2y\,!\;2y\,!$ est divisible par

$$2x + y\,!\;y\,!\;x\,!\;2x - 2y\,!$$

a fortiori donc par $2x+y!\,y!\,x!\,x+2y!$ Ceci donne, en échangeant x et y ou les deux factorielles entre elles, quatre solutions. Il reste six solutions, dont deux sont essentiellement différentes. La première est $5x+y!\,3y!$ Le second théorème, que

$$\frac{4x!\,4y!}{x!\,y!\,(2x+y)!\,(x+2y)!}$$

est entier pour tous les $x, y \geq 0$, est intéressant à deux points de vue : d'abord, en ce que la fraction est symétrique en x et y; et puis, en ce que la somme des coefficients de son numérateur est pour chaque variable aussi petite que possible, savoir égale à celle des coefficients du dénominateur.