NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DAVID HILBERT

Sur le principe de Dirichlet

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 337-344

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__337_1>

[D5c]

SUR LE PRINCIPE DE DIRICHLET;

PAR M. DAVID HILBERT, de Göttingue.

Jahresbericht der D. M. V., Tome VIII, page 117; 1900.
Leipzig, Teubner, I[er] fascicule (seul paru).

Le principe de Dirichlet est un mode de raisonnement que ce géomètre, inspiré par une pensée de Gauss, appliqua à la résolution d'un problème dit aujourd'hui *de Dirichlet* (*Randwertaufgabe*) (1). Ce principe peut

(1) Le terme allemand *Randwertaufgabe* (problème consistant en la recherche de la fonction harmonique prenant des valeurs données sur un contour) correspond bien à la traduction : *Problème* de Dirichlet (*voir* maint endroit des deux premiers Volumes du *Traité d'Analyse* de M. Picard). Il semble bon alors de réserver exclusivement le mot *principe* au mode de raisonnement dont il s'agit. (L. L.)

être rapidement caractérisé comme il suit : En les points du contour donné dans le plan des x, y élevons des perpendiculaires et sur ces perpendiculaires portons les valeurs relatives au contour (*Randwerte* = valeurs que doit prendre la fonction harmonique cherchée sur le contour). Parmi les surfaces $z = f(x, y)$ limitées par les courbes de l'espace qui prennent ainsi naissance, supposons que l'on en cherche une pour laquelle la valeur de l'intégrale

$$J(f) = \int\int \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy$$

soit un minimum. Cette surface, ainsi qu'on le fait voir aisément à l'aide du Calcul des variations, est nécessairement une surface potentielle. C'est en recourant à une considération de cette espèce que Riemann ([1]) a regardé comme établie la démonstration de l'existence de la solution du problème de Dirichlet, et qu'il a ensuite, sans hésiter, établi sur cette base sa grandiose théorie des fonctions abéliennes.

Ce fut Weierstrass qui montra le premier que le mode de raisonnement du principe de Dirichlet ne peut être validement appliqué ici. En effet, si l'on se trouvait en présence d'un nombre fini de valeurs numériques, on pourrait immédiatement conclure que parmi elles il en est une minima; au contraire, si l'on est en présence de valeurs numériques en nombre illimité, il n'est aucunement nécessaire qu'il y en ait une plus petite que toutes les autres; bien plus, il faut prouver dans chaque cas par une démonstration particulière

([1]) *Dissertation inaugurale,* § 16, et *Fonctions abéliennes,* Avant-Propos, p. III. *Comparer,* pour la critique du célèbre raisonnement de Riemann, le *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. II, p. 38. (L. L.)

qu'il existe effectivement une surface $z = f(x, y)$ pour laquelle la valeur de l'intégrale correspondante $J(f)$ est un minimum.

Les importantes recherches de MM. C. Neumann, H.-A. Schwarz et H. Poincaré ont fait voir que, en adoptant certaines hypothèses très générales relatives à la nature du contour et aux valeurs qui s'y rapportent, le problème de Dirichlet est parfaitement résoluble, et que, réciproquement, l'existence de la fonction minima correspondante $f(x, y)$ est parfaitement établie.

Le principe de Dirichlet doit sa célébrité à l'attrayante simplicité de l'idée mathématique dont il tire naissance, à l'incomparable richesse des applications qu'on en peut faire en Mathématiques pures comme en Physique mathématique, et à la force de persuasion qu'il porte en soi. Mais, depuis la critique de Weierstrass, le principe de Dirichlet n'a plus eu qu'un intérêt historique et, comme méthode de résolution de problèmes de Dirichlet, il semble en tout cas délaissé. C'est avec des expressions de regret que M. C. Neumann dit que ce principe de Dirichlet, si beau et si souvent employé autrefois, est maintenant abandonné pour toujours. MM. Brill et Nöther [1] sont les seuls qui aient éveillé en nous un nouvel espoir en exprimant leur conviction que le principe de Dirichlet ressusciterait un jour, le même jusqu'à un certain point quant au fond, mais peut-être avec certaines modifications quant à la forme de l'exposition.

Ce qui suit est un essai de résurrection du principe de Dirichlet.

En réfléchissant que le problème de Dirichlet n'est qu'un problème particulier du Calcul des variations,

---

[1] Brill et Nöther, *Theorie der algebraischen Functionen* (*Jahresbericht der D. M. V.*, t. III, p. 265; 1894). Berlin, Reimer.
(L. L.)

nous arrivons à exprimer le principe de Dirichlet sous la forme plus générale suivante :

Tout problème du Calcul des variations possède une solution, pourvu que certaines hypothèses restrictives convenablement choisies relatives à la nature des conditions limitatives données soient remplies, et, nécessairement aussi, pourvu que ce que l'on entend par le mot solution *éprouve une généralisation conforme au sens, à la nature des choses.*

Ce principe peut servir de fil conducteur dans la recherche de démonstrations d'existence rigoureuses et simples; c'est ce que feront voir les deux exemples suivants :

I. *Sur une surface donnée* $z = f(x, y)$, *mener la ligne la plus courte entre deux points donnés* P et $P^{(1)}$.

Soit l la limite inférieure de la longueur de toutes les courbes passant par les deux points donnés sur la surface. Parmi toutes ces courbes de jonction, cherchons les courbes C_1, C_2, C_3, ... dont les longueurs respectives L_1, L_2, L_3, ... tendent vers la limite l. A partir de P, portons alors sur C_1 la longueur $\frac{1}{2}L_1$, nous obtiendrons ainsi un point $P_1^{(\frac{1}{2})}$; portons ensuite sur C_2, toujours à partir de P, la longueur $\frac{1}{2}L_2$ jusqu'en un point $P_2^{(\frac{1}{2})}$ et de même sur C_3 à partir de P la longueur $\frac{1}{2}L_3$ jusqu'en $P_3^{(\frac{1}{2})}$, et ainsi de suite. Les points $P_1^{(\frac{1}{2})}$, $P_2^{(\frac{1}{2})}$, $P_3^{(\frac{1}{2})}$, ... auront alors comme point de condensation (*Verdichtungsstelle*) un certain point $P^{(\frac{1}{2})}$, $P^{(\frac{1}{2})}$ étant aussi un point de la surface $z = f(x, y)$.

L'opération susdite que nous avons faite sur les points P et $P^{(1)}$, et qui nous a conduit à un point $P^{(\frac{1}{2})}$, appliquons-la aux points P et $P^{(\frac{1}{2})}$, ce qui nous conduira à un point $P^{(\frac{1}{4})}$ de la surface donnée. Nous trouverons encore de même un point $P^{(\frac{3}{4})}$ en appliquant le procédé en question aux points $P^{(\frac{1}{2})}$ et $P^{(1)}$. Nous obtiendrons enfin d'une manière analogue les points $P^{(\frac{1}{8})}$, $P^{(\frac{3}{8})}$, $P^{(\frac{5}{8})}$, $P^{(\frac{7}{8})}$, $P^{(\frac{1}{16})}$, ... Tous ces points et leurs points de condensation formeront sur la surface

$$z = f(x, y)$$

une courbe continue qui est la ligne géodésique cherchée.

Cette affirmation se démontre aisément, si l'on prend comme définition de la longueur d'une courbe la limite de la longueur des lignes brisées polygonales qui y sont inscrites. L'on reconnaît en même temps qu'il suffit dans notre considération de la question d'admettre l'hypothèse que la fonction donnée $f(x, y)$ est continue ainsi que ses dérivées premières prises par rapport à x et à y.

II. *Trouver une fonction potentielle* $z = f(x, y)$ *prenant des valeurs assignées sur le contour d'une courbe donnée du plan des* x, y.

Pour simplifier, nous supposerons que le contour donné ait des tangentes et une courbure continues, et que la dérivée soit continue pour les valeurs assignées sur le contour. Considérons la courbe dans l'espace dont il a été parlé au commencement de cette Note, et déterminons alors un angle fixe φ lié tout particulièrement à cette courbe de l'espace par la propriété suivante : $z=F(x,y)$ étant une surface analytique ou une surface formée de portions de surfaces analytiques, dont le contour est formé par la courbe de l'espace précitée, on peut toujours, à l'aide de $z=F(x,y)$, construire une surface $z=\widehat{F}(x,y)$ telle que l'intégrale $J(\widehat{F})$ qui correspond à $z=\widehat{F}(x,y)$ soit toujours inférieure ou égale en valeur à l'intégrale $J(F)$ qui correspond à $z=F(x,y)$ et que, en même temps, $z=\widehat{F}(x,y)$ ne possède en aucun point une tangente dont l'angle avec le plan des x, y soit supérieur en grandeur à φ. On obtient un tel angle φ en considérant les points où la grandeur de l'inclinaison de la surface $z=F(x,y)$ sur le plan des x, y, c'est-à-dire la quantité

$$\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2},$$

ne surpasse pas une certaine limite, et en faisant voir que la surface $z=F(x,y)$ peut toujours, dans le voisinage de ces points, être remplacée par un morceau du plan

$$z=ax+by+c$$

ou (sur le contour) par un morceau de la surface potentielle en forme d'entonnoir

$$z=\frac{a(x+\alpha)+b(y+\beta)}{(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2}+c,$$

a, b, c, α, β étant des constantes telles que le plan ou les tangentes du morceau correspondant de la surface potentielle soient respectivement moins à pic par rapport au plan des x, y.

Soit i la limite inférieure des intégrales J relatives à toutes les surfaces dont le contour est formé par la courbe de l'espace donnée. Parmi toutes ces surfaces cherchons les surfaces

$$z = F_1(x, y), \qquad z = F_2(x, y), \qquad z = F_3(x, y), \qquad \ldots,$$

pour lesquelles les intégrales correspondantes

$$J_1 = J(F_1), \qquad J_2 = J(F_2), \qquad J_3 = J(F_3), \qquad \ldots$$

tendent vers la limite i.

A cet effet, nous remplacerons chacune des surfaces

$$z = F_1, \qquad z = F_2, \qquad z = F_3, \qquad \ldots,$$

par les surfaces respectives

$$z = \widehat{F_1}, \qquad z = \widehat{F_2}, \qquad z = \widehat{F_3}, \qquad \ldots,$$

qui, en aucun point, n'ont une tangente dont l'angle avec le plan des x, y soit plus grand que l'angle φ.

De plus, cherchons maintenant parmi la suite infinie de fonctions $\widehat{F_1}$, $\widehat{F_2}$, $\widehat{F_3}$, ... une suite infinie de fonctions f_1, f_2, f_3, ... telle que pour tous les points x, y à l'intérieur du contour plan donné qui ont pour coordonnées x, y des nombres rationnels il existe une valeur limite

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} f_n(x, y).$$

Comme l'on a, d'autre part, pour tous les points à l'intérieur du contour,

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x} \right| < \operatorname{tang}\varphi, \qquad \left| \frac{\partial f_i}{\partial y} \right| < \operatorname{tang}\varphi \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

on en conclut aisément que la suite infinie de fonctions f_1, f_2, f_3, ... converge uniformément partout à l'intérieur du contour, et de même sur le contour, c'est-à-dire que

$$f(x, y) = \underset{n=\infty}{\mathrm{L}} f_n(x, y)$$

est une fonction continue des variables x, y.

La surface $z = f(x, y)$ est la surface potentielle cherchée. Il n'y a aucune difficulté à le démontrer; l'on y arrive le plus simplement en s'appuyant sur l'existence de la fonction minima, c'est-à-dire sur la solution du problème de Dirichlet pour le cercle et une fonction continue quelconque sur le contour; on peut aussi le démontrer directement.

Joint à la simplicité et à la clarté du mode de raisonnement que nous avons rapidement décrit, je vois encore l'avantage principal de cette nouvelle méthode dans le fait que l'on emploie seulement la propriété du minimum et que l'on ne fait aucun usage de la nature spéciale du problème, c'est-à-dire ici, par exemple, des propriétés particulières soit des lignes géodésiques, soit de la fonction potentielle. Le nouveau mode de raisonnement est donc applicable à des problèmes plus généraux de la théorie des surfaces ainsi que de la Physique mathématique.

(*Traduit par* L. Laugel.)