PHILBERT DU PLESSIS

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1900. Composition de mathématiques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 320-334

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__320_0>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1900. COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.

SOLUTION PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

I. *Dans le plan* (P) *d'une section plane d'une surface* (E), *pour trouver les normales à la section issues d'un point* O, *on peut employer la méthode suivante : couper* (E) *par une sphère* (S), *et déterminer le rayon* r *de la sphère de façon que le plan* (P) *soit tangent au cône* (C), *qui a pour sommet le point* O *et pour directrice l'intersection* (E, S). *La génératrice de contact* OG *est normale à la section plane au point* G, *où elle rencontre la directrice* (ES) *du cône* (C).

Justifier cette méthode.

II. PREMIÈRE APPLICATION. — *On coupe l'ellipsoïde* (E) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ *par le plan* (P) $ux+vy+wz=0$. *Sur le diamètre perpendiculaire on porte, à partir du centre, une longueur* OM *dont le carré soit moyenne harmonique entre les carrés des demi-axes* α *et* β *de la section* $\frac{2}{\overline{\mathrm{OM}}^2}=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$. *Lieu du point* M, *quand* (P) *pivote autour du point* O.

III. DEUXIÈME APPLICATION. — *Même problème en remplaçant la longueur* OM *par la longueur* ON *déduite de la formule* $\frac{1}{\mathrm{ON}}=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}$. *Étudier la forme du lieu du point* N, *et celle des sections parallèles aux trois plans des coordonnées.*

On conservera les notations indiquées.

I. Coupons la surface (E) par une sphère (S) de centre O. Le plan (P) coupe la surface (E) suivant la courbe (e) et la sphère (S) suivant le grand cercle (e) de centre O. Les génératrices du cône (C) contenues dans le plan (P) sont les droites qui joignent le point O aux divers points de rencontre A de la courbe (e) et du cercle (s).

Dès lors, si OG est une normale menée de O à (e) et que l'on prenne OG comme rayon de (s), c'est-à-dire de (S), deux des points de rencontre A sont confondus en G, donc deux des génératrices OA du cône sont confondues avec OG et ce cône est tangent au plan (P) suivant OG.

Réciproquement, si cette tangence a lieu, deux des génératrices étant confondues avec OG, deux des points A sont confondus avec G, le cercle (s) est tangent à (e), et, par suite, la normale OG à ce cercle est également normale en G à (e).

II. Les longueurs α et β des demi-axes de la section diamétrale de l'ellipsoïde étant celles des normales menées du centre O à cette section, prenons, d'après la méthode justifiée ci-dessus, le cône passant par l'intersection de l'ellipsoïde et de la sphère de rayon r ayant son centre au point O [1]. L'équation de ce cône est

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right)=0,$$

[1] La méthode ici employée est celle qu'impose l'énoncé, mais cette seconde partie du problème peut être résolue beaucoup plus simplement par le procédé que voici :

D'après un théorème bien connu, si γ est le demi-diamètre perpendiculaire au plan donné, on a

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2},$$

et il est tangent au plan

$$ux - vy + wz = 0$$

si l'on a

$$\frac{u^2}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}} - \frac{v^2}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}} + \frac{w^2}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2}} = 0$$

ou

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{r^4}(u^2 + v^2 + w^2) \\ & \quad - \frac{1}{r^2}\left[u^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + v^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) \right. \\ & \qquad\qquad \left. + w^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\right] \\ & \qquad\qquad + \frac{u^2}{b^2c^2} + \frac{v^2}{c^2a^2} + \frac{w^2}{a^2b^2} = 0. \end{aligned} \right.$$

La somme $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ étant celle des racines en $\frac{1}{r^2}$ de

---

d'où

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} - \frac{1}{\gamma^2}.$$

D'ailleurs γ étant le rayon vecteur situé sur la droite

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w},$$

on a

$$\frac{1}{\gamma^2} = \frac{\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2}}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Si l'on porte cette valeur de $\frac{1}{\gamma^2}$ dans l'expression ci-dessus de $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$, il vient

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{u^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + v^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) + w^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)}{u^2 + v^2 + w^2},$$

d'où l'équation du lieu

$$2 = x^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

cette équation, on a, en adoptant le signe $\sum$ pour les sommes dont les termes se déduisent les uns des autres par permutation circulaire,

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\sum u^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)}{\sum u^2}.$$

Par suite, en vertu de l'énoncé,

$$\frac{2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\sum u^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)}{\sum u^2}.$$

En outre, le point M étant sur la perpendiculaire élevée en O au plan donné, on a

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w}.$$

Il vient donc pour le lieu demandé, après suppression de la solution étrangère $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ (cône isotrope de sommet O),

$$2 = \sum x^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right),$$

ou

$$\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + \frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) + \frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 1,$$

ellipsoïde (E_1) de même centre et de mêmes directions d'axes que le précédent, les longueurs de ses axes étant données par

$$\frac{2}{a_1^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}, \qquad \frac{2}{b_1^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}, \qquad \frac{2}{c_1^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

comme cela résulte d'ailleurs directement de l'énoncé.

L'équation ci-dessus peut encore s'écrire

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)(x^2+y^2+z^2)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=1.$$

Sous cette forme, elle montre que *l'ellipsoïde* (E_1) *a mêmes plans cycliques que l'ellipsoïde proposé.*

III. Le sens dans lequel sont portés les segments α et β n'étant pas défini, on a le droit d'élever au carré la relation donnée, qui s'écrit alors

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}-\frac{2}{\alpha\beta}.$$

Nous avons déjà calculé ci-dessus $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$. Nous avons, de même, par le produit des racines de l'équation (1),

$$\frac{1}{\alpha^2\beta^2}=\frac{\sum\frac{u^2}{b^2c^2}}{\sum u^2}.$$

Il vient donc

$$\frac{1}{x^2+y^2+z^2}=\frac{\sum u^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}{\sum u^2}-2\sqrt{\frac{\sum\frac{u^2}{b^2c^2}}{\sum u^2}},$$

et, par suite, pour le lieu demandé, après multiplication par $x^2+y^2+z^2$,

$$1=\sum x^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-2\sqrt{\sum x^2\sum\frac{x^2}{b^2c^2}},$$

que l'on peut écrire

$$(2)\qquad 1-\sum x^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=-2\sqrt{\sum x^2\sum\frac{x^2}{b^2c^2}}.$$

Si l'on élève au carré pour avoir une équation rationnelle, il est essentiel de remarquer que l'*on introduit* *une solution étrangère* correspondant au signe $+$ pris devant le radical du second membre, c'est-à-dire au point N′ porté sur ON et tel que

$$\frac{1}{\mathrm{ON}'} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}.$$

La surface du 4ᵉ degré, représentée par l'équation rendue rationnelle

$$(3) \qquad \left[1 - \sum x^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\right]^2 = 4\sum x^2 \sum \frac{x^2}{b^2 c^2},$$

évidemment symétrique par rapport aux trois plans de coordonnées, comprend donc, outre la nappe (N) répondant à la question, une *nappe parasite* (N′) qu'il est d'ailleurs facile de distinguer de la première. Si, en effet, nous appelons (E_2) l'ellipsoïde défini par l'équation

$$1 - \sum x^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = 0,$$

dont les demi-axes a_2, b_2, c_2 sont donnés par

$$\frac{1}{a_2^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}, \qquad \frac{1}{b_2^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}, \qquad \frac{1}{c_2^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2},$$

qui, par suite, est homothétique de (E_1) par rapport à O [1], nous voyons, d'après (2), que la substitution des coordonnées des points N dans l'équation de (E_2) donne un résultat négatif alors que c'est le contraire qui a lieu pour les points N′.

En d'autres termes, *la nappe* (N) *constituant le lieu cherché est tout entière à l'extérieur de l'ellipsoïde* (E_2), *tandis que la nappe parasite* (N′) *est à l'intérieur.*

---

[1] Si le point N avait été défini, dans l'énoncé, par la relation $\frac{2}{\mathrm{ON}} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}$, c'est par l'ellipsoïde même obtenu dans la seconde partie que la séparation eût été faite.

Sous réserve de cette distinction, nous allons étudier la surface représentée par l'équation (3). Il est facile de voir que cette équation développée peut se mettre sous la forme

$$(3\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum x^4\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2\\ &\quad -2\sum x^2y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\\ &\qquad\qquad -2\sum x^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+1=0.\end{aligned}\right.$$

Adoptant, suivant l'usage, l'hypothèse

$$a > b > c,$$

pour définir la grandeur relative des trois axes, nous avons le droit de poser

$$\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}=-\frac{1}{a_3^2},\qquad \frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b_3^2},\qquad \frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=-\frac{1}{c_3^2}.$$

Moyennant cette convention, et en se reportant à la définition de a_2, b_2, c_2, on peut enfin écrire l'équation

$$(3\ ter)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^4}{a_3^4}+\frac{y^4}{b_3^4}+\frac{z^4}{c_3^4}\\ &\quad +2\left(\frac{x^2y^2}{a_3^2b_3^2}+\frac{y^2z^2}{b_3^2c_3^2}-\frac{z^2x^2}{c_3^2a_3^2}\right)\\ &\qquad\qquad -2\left(\frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}+\frac{z^2}{c_2^2}\right)+1=0.\end{aligned}\right.$$

Le cône asymptote de cette surface est donné par l'ensemble des termes du degré le plus élevé qui peut s'écrire

$$\left(\frac{x^2}{a_3^2}-\frac{z^2}{c_3^2}\right)^2+2\frac{y^2}{b_3^2}\left(\frac{x^2}{a_3^2}+\frac{z^2}{c_3^2}\right)+\frac{y^4}{b_3^4}=0,$$

et cette somme de carrés ne saurait évidemment s'annuler que pour

$$y=0,\qquad \frac{x^2}{a_3^2}-\frac{z^2}{c_3^2}=0.$$

Autrement dit le cône asymptote se réduit à l'ensemble des deux droites

$$y = 0, \qquad \frac{x}{z} = \pm\frac{a_3}{c_3} = \pm\frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{a\sqrt{b^2 - c^2}},$$

dans lesquelles on reconnaît les normales aux plans cycliques réels de l'ellipsoïde (E). Ce résultat était facile à prévoir *a priori*. Il ne saurait y avoir de points à l'infini que dans la direction des droites ON, pour lesquelles s'annule la différence $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}$, c'est-à-dire des normales aux sections pour lesquelles on a $\alpha = \beta$, qui sont les sections cycliques passant par l'axe moyen Oy. On déduit immédiatement de là que, parmi les sections de la nappe (N) parallèles aux plans principaux, seules celles qui sont parallèles à Oxz pourront avoir des branches infinies. Il est bien évident d'ailleurs que la branche parasite (N′), comprise tout entière à l'intérieur de l'ellipsoïde (E_2), ne saurait avoir de points à l'infini. Nous allons maintenant étudier en détail la forme de ces sections.

Convenons auparavant de représenter par X_1, Y_1, Z_1 les sommets de la nappe utile de la surface, donnés respectivement sur Ox, Oy, Oz par $x_1 = \pm\frac{bc}{b-c}$, $y_1 = \pm\frac{ca}{c-a}$, $z_1 = \pm\frac{ab}{a-b}$, comme le montre la définition même du lieu appliquée aux sections principales et comme le vérifie le calcul. De même, X'_1, Y'_1, Z'_1 désigneront les sommets correspondants de la nappe parasite donnés par $x'_1 = \pm\frac{bc}{b+c}$, $y'_1 = \pm\frac{ca}{c+a}$, $z'_1 = \pm\frac{ab}{a+b}$.

Convenons également de poser

$$A = a^2 - bc, \qquad B = b^2 - ca, \qquad C = c^2 - ab,$$

en remarquant qu'on a toujours $A > o$, $C < o$, tandis que B peut avoir l'un ou l'autre signe.

Sections parallèles au plan Oxy. — Prenons d'abord la section de la surface par le plan Oxy lui-même en faisant $z = o$ dans l'équation (3 *ter*), ce qui donne

$$\left(\frac{x^2}{a_3^2} + \frac{y^2}{b_3^2}\right)^2 - 2\left(\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2}\right) + 1 = 0,$$

courbe fermée, comme on vient de le voir et comme cela se vérifie immédiatement sur l'équation, qui comprend deux branches, l'une parasite intérieure à la section principale correspondante de l'ellipsoïde (E_2) défini plus haut, l'autre appartenant au lieu demandé, extérieure à cette même section principale.

La tangente $y = y_1$ au sommet Y_1 coupe en outre la courbe en des points dont les abscisses sont données par

$$\frac{x^2}{a_3^2} - 2\left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{y_1^2}{a_3^2 b_3^2}\right) = 0.$$

Ces points seront réels si

$$\frac{1}{a_2^2} - \frac{y_1^2}{a_3^2 b_3^2} > 0,$$

ou, en remplaçant y_1, a_2, a_3 et b_3 par leurs valeurs,

$$\frac{1}{b^2 c^2}\left[b^2 + c^2 - \frac{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}{(a - c)^2}\right] > 0,$$

ou encore, en réduisant et supprimant tous les facteurs positifs,

$$-B > 0,$$

c'est-à-dire

$$B < 0.$$

Le même calcul, appliqué au sommet X_1, montre que la condition vérifiée $A > 0$ fait que la tangente $x = x_1$ coupe la courbe en des points imaginaires.

Si $B > 0$, les tangentes aux sommets Y_1 ne coupent de même la courbe qu'en des points imaginaires, et la disposition est celle de la *fig.* 1, où le trait plein indique

Fig. 1.

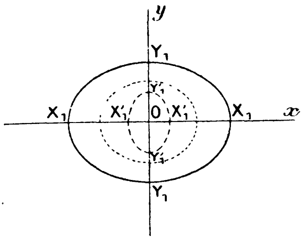
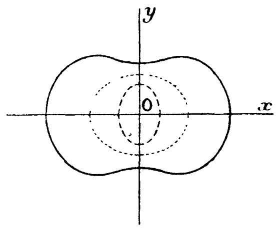


Fig. 1 *bis*.



la branche utile de la courbe, le trait interrompu la branche parasite, et le trait pointillé l'ellipse de séparation. Si $B < 0$, la tangente en X_1 coupe la courbe en des points réels; on a la disposition de la *fig.* 1 *bis*.

Si, d'ailleurs, partant de la disposition 1, on fait croître z, on atteint à la disposition 1 *bis*, les sommets Y_1 se rapprochant de plus en plus jusqu'à ce que, pour $z = z_1$, ces deux sommets se réunissent au point O pour donner la disposition de la *fig.* 1 *ter*.

Fig. 1 *ter*.

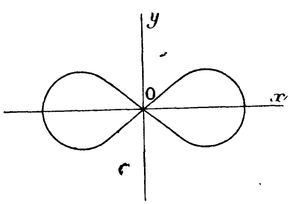
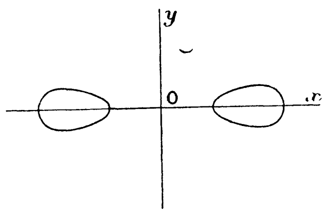


Fig. 1 *quater*.



Remarquons que, dans l'intervalle, pour $z = z'_1$ la branche parasite s'est évanouie en se réduisant à un point en O.

Pour $z > z_1$, la courbe se sépare en deux ovales, ainsi que le montre la *fig.* 1 *quater*.

Sections parallèles à Oyz. — La discussion est la même que ci-dessus. On trouve que, par suite de la condition vérifiée $C < 0$, la tangente au sommet Z_1 ne coupe jamais la courbe en des points réels, et que la tangente au sommet Y_1 la coupe en des points réels si $B > 0$, condition *inverse* de celle ci-dessus, en sorte que la section par le plan Oyz présente des points d'inflexion si la section par Oxy n'en présente pas, et réciproquement.

Sous réserve de cette remarque essentielle, les états successifs des sections parallèles à Oyz sont données par les *fig.* 1 à 1 *quater*, dans lesquelles il suffit de changer x en z.

Il est bien entendu d'ailleurs que, si parallèlement à Oxy on commence par la disposition 1, parallèlement à Oyz c'est par la disposition 1 *bis*, et inversement.

Dans le cas où $B = 0$, les sections par Oxy et Oyz ont l'une et l'autre, en Y_1, quatre points confondus sur la tangente en ce point, perpendiculaire à Oy. Elles présentent alors en ces sommets ce qu'on peut appeler un *méplat*.

Sections parallèles à Ozx. — La section par le plan Ozx a une équation qui peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{x^2}{a_3^2} - \frac{z^2}{c_3^2}\right)^2 - 2\left(\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{c_2^2}\right) + 1 = 0.$$

Ici les directions asymptotiques sont réelles :

$$\frac{x}{a_3} = \pm \frac{z}{c_3}.$$

Pour trouver les asymptotes parallèles à l'une d'elles, posons

$$\frac{x}{a_3} = \frac{z}{c_3} + \lambda,$$

et ayant fait cette substitution, annulons le terme en z^2, ce qui nous donne

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a_3^2}{a_2^2} + \frac{c_3^2}{c_2^2}\right).$$

Nous voyons qu'il y a ainsi quatre asymptotes réelles symétriques deux à deux par rapport aux axes Ox et Oy, et coupant chacune la courbe en un point à distance finie. Il est d'ailleurs bien évident que la branche parasite est intérieure au losange formé par les tangentes parallèles aux asymptotes, sans quoi il existerait des parallèles à ces asymptotes coupant la courbe en plus de quatre points. On a ainsi la disposition de la *fig.* 2 (¹).

Fig. 2.

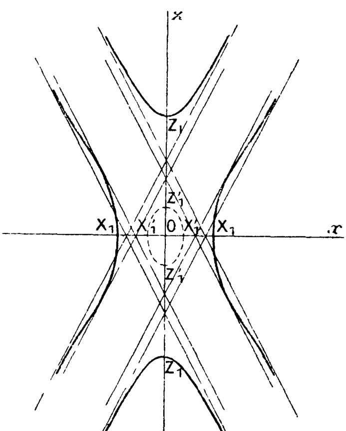
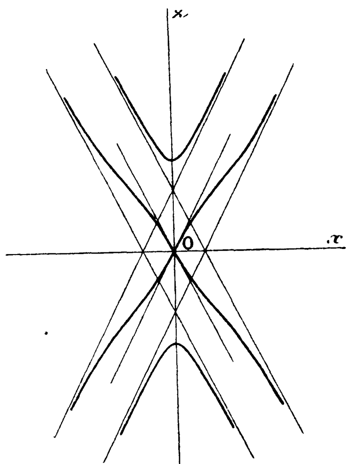


Fig. 2 *bis*.



Si l'on donne à y une valeur quelconque, les λ des

(¹) Les *fig.* 2 à 2 *quater* correspondent à l'hypothèse $B > 0$, pour laquelle la section Oxy présente la disposition de la *fig.* 1, et la section Oyz celle de la *fig.* 1 *bis*. Si l'on supposait $B < 0$, auquel cas ces deux dernières dispositions permuteraient entre elles, il faudrait sur les *fig.* 2 à 2 *quater* permuter entre eux les axes Ox et Oz.

asymptotes sont donnés de même par

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a_3^2}{a_2^2} + \frac{c_3^2}{c_2^2}\right) - \frac{y^2}{b_3^2}.$$

Donc, lorsque y croît λ diminue, c'est-à-dire que les asymptotes se rapprochent. Pour $y = y'_1$ la branche parasite s'évanouit au point O. Pour $y = y_1$ la courbe présente un point double en O, où les tangentes sont nécessairement parallèles aux asymptotes. On a alors la disposition de la *fig.* 2 *bis*.

Au delà de cette valeur, la courbe présente la disposition de la *fig.* 2 *ter*.

Fig. 2 *ter*.

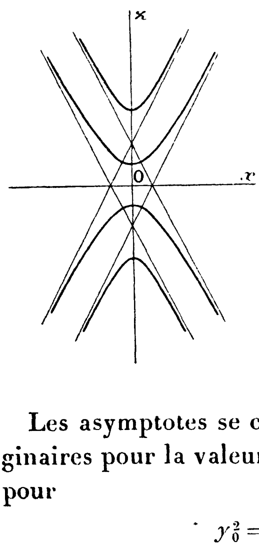
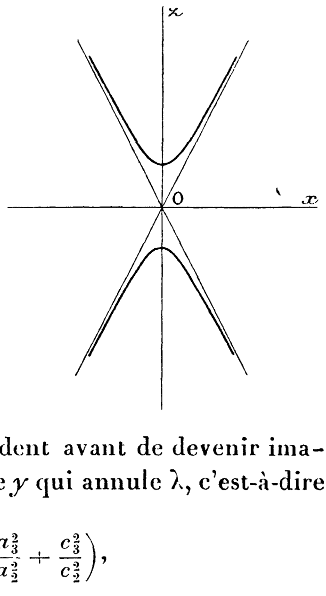


Fig. 2 *quater*.



Les asymptotes se confondent avant de devenir imaginaires pour la valeur y_0 de y qui annule λ, c'est-à-dire pour

$$y_0^2 = \frac{b_3^2}{2}\left(\frac{a_3^2}{a_2^2} + \frac{c_3^2}{c_2^2}\right),$$

ou, toutes réductions faites, pour

$$y_0^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}.$$

Or, si l'on prend l'équation de la section par Oyz mise sous la forme

$$\frac{z^4}{c_3^4}+2z^2\left(\frac{y^2}{b_3^2c_3^2}-\frac{1}{c_2^2}\right)+\frac{y^4}{b_3^4}-2\frac{y^2}{b_2^2}+1=0,$$

on voit que la condition de réalité des racines en z est

$$\left(\frac{y^2}{b_3^2c_3^2}-\frac{1}{c_2^2}\right)^2-\frac{1}{c_3^4}\left(\frac{y^4}{b_3^4}-2\frac{y^2}{b_2^2}+1\right)\geq 0,$$

ou, toutes réductions faites,

$$y^2\leq\frac{a^2b^2c^2}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}.$$

La section parallèle à Oxz tout entière devient donc imaginaire pour $y=y_0$. Autrement dit, le plan $y=y_0$ est un plan tangent singulier touchant la surface le long d'une courbe en laquelle doit se dédoubler la quartique précédente, puisqu'on passe à l'imaginaire, c'est-à-dire d'une hyperbole. On peut d'ailleurs le vérifier par le calcul. Si, en effet, on pose

$$U=\frac{y^4}{b_3^4}-2\frac{y^2}{b_2^2}+1,$$

on a, pour cette valeur particulière de y,

$$\frac{y^2}{b_3^2c_3^2}-\frac{1}{c_2^2}=\frac{\sqrt{U}}{c_3^2}\quad\text{et}\quad\frac{y^2}{a_3^2b_3^2}-\frac{1}{a_2^2}=\frac{-\sqrt{U}}{a_3^2},$$

de sorte que l'équation de la courbe peut s'écrire

$$\left(\frac{x^2}{a_3^2}-\frac{z^2}{c_3^2}\right)^2-2x^2\frac{\sqrt{U}}{a_3^2}+2z^2\frac{\sqrt{U}}{c_3^2}+U=0,$$

ou

$$\left(\frac{x^2}{a_3^2}-\frac{z^2}{c_3^2}-\sqrt{U}\right)^2=0.$$

La disposition est donc celle de la *fig.* 2 *quater*, l'hyperbole étant prise en double.

Si $B=0$, on a $y_0=y_1$; le dédoublement de la courbe en deux hyperboles a lieu en même temps que le passage de cette courbe par le point O (*fig.* 2 *bis*). Autrement dit, l'hyperbole de la *fig.* 2 *quater* dégénère en ses deux asymptotes. La surface a deux plans tangents singuliers parallèles à Oxz, la touchant chacun suivant un système de deux droites passant par un point Y_1.

Remarque. — Il est intéressant de définir le caractère géométrique de l'ellipsoïde donné lorsque la surface (N) présente cette singularité, c'est-à-dire lorsque

$$b^2 = ac.$$

Les normales aux sections cycliques données par

$$\frac{z}{x} = \pm \frac{a\sqrt{b^2 - c^2}}{c\sqrt{a^2 - b^2}},$$

deviennent alors

$$\frac{z}{x} = \pm\sqrt{\frac{a}{c}}.$$

Or, les points de l'ellipse où la normale fait le plus grand angle avec la normale correspondante au cercle principal, dont M. d'Ocagne a fait connaître de nombreuses propriétés sous le nom de *points de déviation maxima* (*N. A.*, 3e série, t. V, p. 370 et 534, 1886, et t. VII, p. 268; 1888), sont précisément tels que le coefficient angulaire de la normale y est égal à $\pm\sqrt{\frac{a}{c}}$. De là cette conséquence :

Les ellipsoïdes pour lesquels la surface (N) *présente la singularité signalée, à savoir de posséder deux couples de génératrices rectilignes singulières le long desquelles le plan tangent est le même, sont ceux dont les ombilics réels coïncident avec les points de déviation maxima de la section principale perpendiculaire à l'axe moyen.*