Certificats d'études supérieures des facultés des sciences. Session de juillet 1899. Compositions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 31-45

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__31_1>

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1899. — COMPOSITIONS.

Clermont.

CERTIFICAT D'ANALYSE.

Trouver les courbes telles que le rayon de courbure en un point M *de la courbe soit une fonction donnée du rayon vecteur* OM *de ce point,* O *est un point fixe. Traiter complètement le cas où le rayon de courbure est proportionnel à* OM.

Lorsque la distance OP *du point* O *à la tangente en* M *est proportionnelle à une puissance de* OM, *il en est de même du rayon de courbure; trouver l'équation de ces courbes sous forme finie.*

Épreuve pratique. — *Calculer les deux intégrales*

$$\int_0^1 x^p(1-x)^p\,dx,$$

$$\int_0^1 e^x x^p(1-x)^p\,dx.$$

En déduire une valeur approchée du nombre, base des logarithmes népériens; limite supérieure de l'erreur commise.

Certificat de Mécanique.

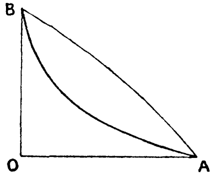
I. *Un point mobile sur une parabole est soumis à l'action d'une force, fonction de la distance, passant par le foyer. Trouver la loi de la force pour que cette parabole soit une courbe brachistochrone.*

Étudier le mouvement et calculer la réaction.

II. *Dans le mouvement d'un plan sur un plan une droite du plan mobile passe par un point fixe* O, *la base est un cercle passant par* O.

Trouver la roulette et construire à chaque instant le cercle des inflexions.

Épreuve pratique. — *Une aire plane homogène est limitée par deux droites rectangulaires* OA, OB *et un arc de cercle* AB *tangent à ces deux droites.*



Trouver en unités C. G. S. :

1° *Les distances du centre de gravité aux deux droites* OA *et* OB;

2° *Le moment d'inertie de l'aire par rapport à la droite* AB.

Masse totale de l'aire $= 2400$,

$$OA = OB = 180.$$

Grenoble.

Certificat d'Analyse.

On considère la surface définie par l'équation

$$(x^2 + y^2 + z^2)x - 2a(x^2 + y^2) = 0,$$

et l'on demande de déterminer :

1° *Les lieux des traces des normales à cette surface sur les plans* zOx *et* yOx;

2° *Les lignes de courbure de cette surface.*

On reconnaîtra que cette surface est de deux façons différentes l'enveloppe d'une famille de sphères.

Épreuve pratique. — *Développement de*

$$y = \tfrac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 1})^m + \tfrac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 1})^{-m},$$

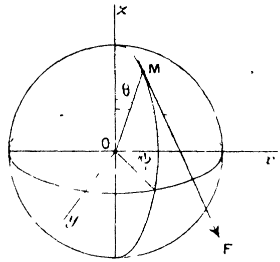
suivant les puissances ascendantes de x, m *étant entier ou fractionnaire. Cercle de convergence.*

Certificat de Mécanique.

Épreuve écrite. — *Un point matériel* M, *de masse* m, *non pesant, est mobile sans frottement sur la sphère*

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

θ *et* ψ *désignant ses coordonnées polaires (colatitude et longitude). Il est soumis à l'action d'une force* F *dirigée constamment suivant la tangente au méridien et que l'on convient de considérer comme* *positive dans le sens où θ croît, comme négative dans le sens opposé.*



1° *Démontrer que* F *peut être exprimé par la formule*

$$F = \frac{-mA}{\sin^2\theta}\left(\cot\theta + \frac{d^2\cot\theta}{d\psi^2}\right),$$

où A *est une constante positive;*

2° *On suppose* F *donné et égal à*

$$-\frac{m\mu\sin^2\psi}{\sin^2\theta}\,(\mu > 0);$$

on demande de déterminer les différentes trajectoires que peut décrire le point h *et de montrer que les cônes ayant pour sommet le centre de la sphère et pour directrices ces trajectoires sont tous du quatrième degré.*

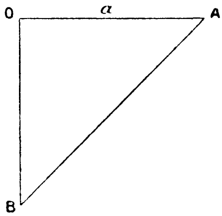
Examiner le cas particulier suivant :

$\psi_0 = 0$; *la vitesse initiale* v_0 *est perpendiculaire à* Oz, *et l'on a :*

$$v_0^2 = \frac{4\mu a}{3\sin 2\theta_0}\left(\theta_0 < \frac{\pi}{2}\right).$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne un prisme droit homogène dont la section droite est un triangle rectangle et isoscèle* OAB *de côté* a *et dont les arêtes ont une longueur* h. *La densité du prisme est* ρ.

On demande les moments d'inertie du prisme par rapport à ses arêtes et les longueurs des pendules



simples synchrones des pendules composés que l'on obtient en faisant osciller le prisme successivement autour de ces arêtes supposées horizontales.

Lille.

Calcul différentiel et intégral.

1° *Déterminer les pôles de la fonction de u*

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv},$$

où pu est la fonction de Weierstras et où v désigne un argument constant;

2° *Décomposer cette fonction en éléments simples et déterminer son intégrale;*

3° *Démontrer* a priori *que la fonction elliptique du huitième ordre*

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2$$

satisfait à une équation de la forme

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = f(y),$$

où $f(y)$ représente un polynôme du quatrième degré en y; former ce polynôme.

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Deux points matériels non pesants M *et* M′, *de masses* m *et* m', *sont assujettis à se mouvoir, sans frottement, le premier sur un cylindre de révolution, le second sur l'axe de ce cylindre; on demande d'étudier leurs mouvements, sachant qu'ils s'attirent proportionnellement à leur distance.*

On suppose qu'à l'instant initial les deux points sont dans un même plan xOy *de section droite du cylindre, et l'on déterminera les vitesses initiales, de manière que le centre de gravité* G *du système des deux points reste dans le plan* xOy, *pendant toute la durée du mouvement.*

MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

COMPOSITION ÉCRITE. — *Établir les équations de la théorie générale des turbines hydrauliques, et les appliquer à une première étude comparative des diverses dispositions adoptées pour ces moteurs.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne, par un croquis côté, une distribution Farcot dont l'une des ailes de la came a pour profil une développante de cercle.*

1° *De quel angle faut-il faire tourner la came pour faire passer l'indice de détente de* $\frac{1}{10}$ *à* $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, ...?

2° *Déterminer par tangentes le profil de la seconde aile de la came de manière à obtenir le même indice de détente des deux côtés du piston, malgré l'obliquité de la bielle du piston.*

ASTRONOMIE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Déterminer les éléments de l'orbite d'une planète dont on connaît la position et la* *vitesse initiales (on établira toutes les formules employées).*

Étudier comment varient ces éléments lorsque, la grandeur et la direction de la vitesse initiale restant invariables, la position initiale occupe les différents points d'un rayon vecteur issu du Soleil (on laissera de côté les orbites hyperboliques).

Marseille.

Analyse infinitésimale.

On considère la fonction

$$y = a(z-x)^4 - 4ax(z-x)^3 + (6ax^2+b)(z-x)^2 \\ - 2x(2ax^2+b)(z-x) + ax^4 + bx^2 + c,$$

et l'équation différentielle

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{y}.$$

1° *Intégrer cette équation quand on a*

$$a = 1, \qquad b = 1, \qquad c = 0;$$

2° *En prenant $z - 2x$ pour nouvelle fonction de x, on peut ramener l'intégration de l'équation différentielle aux quadratures. Réduire ces quadratures aux formes les plus simples dans le cas où c n'est pas nul. On considérera spécialement le cas où l'on a*

$$a + b + c = 0:$$

3° *Intégrer l'équation différentielle, dans le cas où l'on a*

$$a = 1, \qquad b = 0, \qquad c = 1,$$

au moyen d'une série entière en x, s'annulant pour $x = 0$, et convergente dans un cercle ayant pour *centre l'origine. On indiquera seulement la règle de construction de la série, et l'on déterminera une limite du rayon du cercle de convergence.*

Posons

$$z - 2x = t,$$

il viendra

$$y = at^4 + bt^2 + c = \mathrm{T},$$

et l'équation générale

$$\frac{dz}{dx} = f(z - 2x)$$

prendra la forme

$$dx = \frac{dt}{f(t) - 2},$$

où les variables sont séparées.

Dans le calcul proposé, on a, par les procédés classiques, pour $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$

$$x = \frac{1}{\sqrt{17}} \left\{ \log \left[\frac{t - \alpha}{t + \alpha} \left(\frac{\sqrt{t^2 + 1} - \beta}{\sqrt{t^2 + 1} + \beta} \right)^{\frac{\beta}{2}} \right] \right.$$
$$\left. - \frac{2}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{t}{\beta} + \alpha \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{\alpha} \right\},$$

où l'on a

$$t^4 + t^2 - 4 = (t^2 - \alpha^2)(t^2 + \beta^2).$$

Dans le cas général, on a des intégrales abéliennes de forme classique qui, pour $a + b + c = 0$, se ramènent à l'intégrale elliptique de première espèce.

Enfin, dans le cas où l'on a

$$a = 1, \qquad b = 0, \qquad c = 1,$$

l'équation différentielle a la forme

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{(z - 2x)^4 + 1}.$$

En appliquant le théorème classique de Briot et Bouquet, ~~on~~ peut prendre, par exemple,

$$b = |z| < \tfrac{1}{2}, \qquad a = |x| < \tfrac{1}{4}, \qquad M = \sqrt{2}.$$

et l'on a pour rayon du cercle de convergence d'après Briot et Bouquet

$$a' = a\left(1 - e^{-\frac{2Ma}{b}}\right) = a\left(1 - e^{-\sqrt{2}}\right).$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Ramener à une intégrale simple le calcul de l'aire déterminée par un contour simple fermé sur le paraboloïde dont l'équation est*

$$z = \frac{xy}{a},$$

en coordonnées rectangulaires.

En particulier, faire le calcul dans le cas où l'aire considérée se projette suivant l'une des boucles de la courbe définie sur le plan des xy par l'équation

$$\rho^2 + a^2 = a^2\sqrt[3]{1 + 2\sin\omega\cos\omega}.$$

Évaluer cette aire à 1^{cmq} *près, en prenant a égal à* 1^{m}.

Quelle est la signification du signe de a?

SOLUTIONS.

$$A = \frac{1}{3a}\int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega\left[(a^2 + \rho_1)^{\frac{3}{2}} - (a^2 + \rho_0^2)^{\frac{3}{2}}\right],$$

$$\rho_0 = 0, \qquad (\rho_1^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} = a^3(\sin\omega + \cos\omega),$$

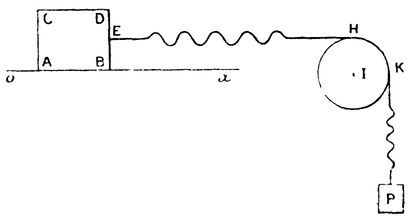
$$A = \frac{a^2(4 - \pi)}{6} = a^2 \times 0{,}1430.$$

Le signe de a est lié à la distribution des plans tangents le long d'une génératrice.

MÉCANIQUE.

Dans un plan vertical, une plaque ABCD *est assujettie à glisser sur une droite horizontale* OX; *la plaque pèse* 10^{kg} *et le coefficient de frottement est égal à* 0,2.

En un point E *de la plaque est attachée l'une des extrémités d'un fil, flexible, inextensible et sans masse, qui va passer sur une poulie pleine et homogène pesant* 10^{kg}, *qui est mobile autour d'un axe horizontal* I.



Le fil s'enroule d'abord sur la poulie sur laquelle il ne peut pas glisser, puis il quitte la poulie et porte à son autre extrémité un poids P *de* 1^{kg}.

Primitivement les corps sont sans vitesse. Entre la plaque et la poulie, le fil n'est pas tendu, et l'excès de sa longueur entre le point d'attache E *et le point* H *où la tangente* EH, *qui est horizontale, toucherait la poulie est égal à* 1^{m}. *De même, entre la poulie et le poids* P, *le fil n'est pas tendu et il a un excès de longueur égal à* 1^{m}. *Le poids* P *est situé sur la tangente verticale à la poulie. L'horizontale* EH *passe par le centre de gravité de la plaque; de sorte que le frottement n'intervient pas pendant la percussion.*

On abandonne le système à lui-même. Étudier son mouvement.

SOLUTION.

Il y a un premier choc après lequel le poids P et le point K de la poulie ont une vitesse

$$v_1 = \frac{\sqrt{2g}}{6}.$$

Avant le deuxième choc, cette vitesse est devenue

$$v^2 = v_1^2 + \frac{1}{3} g = \frac{7g}{18}.$$

Après le deuxième choc, le théorème des moments des quantités de mouvement appliqué en considérant l'axe de la poulie donne une vitesse nouvelle

$$v_2 = \frac{3}{8} v = \frac{1}{16}\sqrt{14g}.$$

On considère enfin après le deuxième choc le système entier (poids, disque, plaque). On applique le théorème du centre de gravité à la plaque, le théorème des aires au disque, et enfin on a pour le mouvement du poids P

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{9}{8}x + \frac{7g}{128}.$$

La vitesse devient nulle quand on a

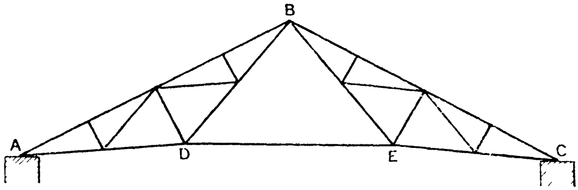
$$x = \frac{56}{128} = 0^{\text{m}},43,$$

et le système entier s'arrête.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une ferme* ABCDE *du système Polonceau a* 40^{m} *de portée; elle repose par ses extrémités* A *et* C *sur deux murs verticaux.*

La hauteur du sommet B *de la ferme au-dessus de l'horizontale* AC *est de* 10^{m} *et la barre horizontale* DE *qui relie les deux arbalétriers est à* 1^{m} *au-dessus de* AC.

Chacun des arbalétriers AB *et* BC *est formé de quatre tiges s'articulant entre elles et sur lesquelles s'articulent d'autres tiges formant, comme l'indique la*



figure, six triangles pour l'ensemble du système de chaque arbalétrier.

La ferme supporte un poids de 400^{kg} *par mètre courant.*

Trouver les tensions des tiges en recourant au dessin ou au calcul, selon la tension qu'il s'agira de déterminer.

On calcule la tension de la base DE en prenant les moments par rapport au point B.

Pour toutes les autres forces ou tensions la règle du parallélogramme appliquée graphiquement suffit.

ASTRONOMIE.

1° *Définir l'équation du temps, calculer les premiers termes de son développement et montrer qu'elle s'annule quatre fois par an.*

Pour établir ce dernier point, on admettra que l'excentricité de l'orbite terrestre est de $\frac{1}{60}$ *et que* $\tang^2 \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{23}$, ε *désignant l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur.*

2° *Définir les éléments de l'orbite parabolique d'une comète. Établir l'équation algébrique qui,* *dans le cas du mouvement parabolique, sert à calculer l'anomalie vraie au moyen du temps écoulé depuis le passage au périhélie.*

Épreuve pratique. — Première question : *Établir les formules qui donnent* $\sin^n x$ *et* $\cos^n x$ *en fonction des sinus et des cosinus des multiples de l'arc* x.

Faire l'application à $\sin^5 x$ *et vérifier l'exactitude de la formule obtenue en attribuant à* x *la valeur* $\frac{\pi}{3}$.

Deuxième question. — *D'après M. Faye, la longueur* s *d'un arc de méridien terrestre exprimé en toises a pour expression :*

$$s = [1{,}1997220]\alpha'' - [4{,}22571]\sin\alpha\cos 2\psi + [1{,}254]\sin 2\alpha\cos 4\psi,$$

α *désignant l'amplitude de cet arc, et* ψ *sa latitude moyenne.*

1° *Calculer en toises, au moyen de cette formule, la longueur de l'arc compris entre les parallèles de Paris et de Marseille, en adoptant pour latitudes respectives de ces parallèles :*

Paris....................	$48^\circ.50'.11''$ N
Marseille...............	$43^\circ.18'.19''$ »

(*dans la formule ci-dessus, les nombres entre crochets sont des logarithmes;* α'' *désigne l'amplitude de l'arc évalué en secondes*);

2° *Calculer le même arc* s *en mètres, sachant que* 10000000 *de mètres valent* 5130740 *toises.*

SOLUTION.

Première question. — Des formules bien connues

$$2i\sin x = e^{ix} - e^{-ix}, \qquad 2\cos x = e^{ix} + e^{-ix},$$

on déduit immédiatement pour toutes les valeurs de n

$$2^{n-1}\cos^n_x = \cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x + \ldots,$$

pour n pair

$$(-1)^{\frac{n}{2}}2^{n-1}\sin^n_x = \cos nx - \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x - \ldots,$$

et pour n impair

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}2^{n-1}\sin^n_x = \sin nx - \frac{n}{1}\sin(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)x - \ldots.$$

Quand n est pair, il faut prendre la moitié seulement du dernier terme qui a été doublé

$$2^4\sin^5 x = \sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x.$$

Deuxième question :

$$\varphi = 43^\circ.18'.19'' \qquad \varphi' - \varphi = \alpha = 5^\circ.31'.52$$
$$\varphi' = 48.50.11 \qquad 2\alpha = 11.\ 3$$
$$\varphi + \varphi' = 2\psi = 92.\ 8.30 \qquad \alpha'' = 19912''$$
$$4\psi = 184.17$$

$$s = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}.$$

	Log.		Log.	T.
α''..............	4,2991149	I...........	5,4988369	315382,0
Coefficient I.....	1,1997220	II..........	1,78234	60,6
		III.........	—0,536	—3,4
$\sin\alpha$............	$\bar{2}$,98401	s (en toises).		315439,2
$\cos 2\psi$...........	—$\bar{2}$,57262			
— Coefficient II..	—4,22571	s (en toises).	5,4989157	
		$\frac{\text{toise}}{\text{mètre}}$......	0,2898200	
$\sin 2\alpha$...........	$\bar{1}$,283	s (en mètres).	5,7887357	M 614802,6
$\cos 4\psi$..........	—$\bar{1}$,999			
Coefficient III....	·1,254			

Réponse :

$$s = \begin{cases} 315439{,}2 \text{ toises.} \\ 614802{,}6 \text{ mètres.} \end{cases}$$