NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats d'études supérieures des facultés des sciences. Session de novembre 1899. Compositions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 307-318

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__307_0>

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE NOVEMBRE 1899. — COMPOSITIONS.

Marseille.

Analyse infinitésimale.

Épreuve écrite. — *Déterminer les lignes asymptotiques de la surface représentée en coordonnées cartésiennes par le système d'équations*

$$x = l\cos\theta\cos\varphi, \qquad y = l\cos\theta\sin\varphi, \qquad z = a\varphi + l\sin\theta,$$

où les paramètres a et θ sont fixes et les paramètres l et φ variables et indépendants l'un de l'autre.

On trouve : $l(\varphi - \varphi_0 = \text{const.}$

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale définie*

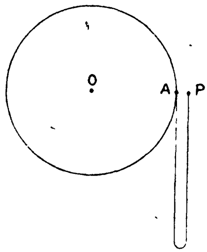
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}.$$

En intégrant le long d'un contour formé par l'axe des x réels et un demi-cercle d'un très grand rayon ayant pour centre l'origine, on trouve : $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

Mécanique.

Épreuve écrite. — *Une poulie de rayon* R *et de masse* M *peut tourner sans frottement autour de son axe* O *qui est horizontal et fixe.*

Sur la circonférence de la poulie s'enroule un fil flexible, inextensible et sans masse, dont l'une des extrémités est fixée sur la poulie, et dont l'autre extrémité se trouve primitivement en A *sur le diamètre ho-*



rizontal de la poulie. A cette extrémité A *est attaché un fil flexible, élastique et sans masse, de longueur a, qui porte un poids* P *de masse m; mais ce fil est d'abord replié sur lui-même de manière que primitivement le poids P est très voisin du point* A.

Tout le système étant d'abord immobile, on abandonne à lui-même le poids P *qui, bientôt, tend les fils et donne au fil élastique un allongement x, dont la valeur est reliée à celle de la tension* T *par l'expression*

$$T = \lambda \frac{x}{a}.$$

Sachant que le fil ne peut pas supporter une tension supérieure à 100^{kg}, *on demande s'il se rompra, sachant que l'on a*

$$M = 10m, \qquad \lambda = 1000, \qquad p = 10, \qquad a = 4, \qquad R + 1.$$

On a, pour le mouvement de la poulie,

$$MK^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = TR \qquad \text{ou} \qquad 5mR \frac{d^2\theta}{dt^2} = T,$$

et, pour le mouvement du poids,

$$m\left(R\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{d^2x}{dt^2}\right)=mg-T,\qquad T=\frac{\lambda x}{a}.$$

On est ramené à discuter l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{6\lambda}{5am}\left(x-\frac{5am}{6\lambda}\right)=0.$$

Son intégrale

$$x=\frac{5am}{6\lambda}(1-\cos ht)+\frac{\sqrt{2ga}}{h}\sin ht,\qquad h=\sqrt{\frac{6\lambda}{5am}}$$

montre que l'allongement ne dépasse pas l'allongement donné par la relation

$$X\frac{1000}{4}=100;$$

Le fil ne rompt pas.

Épreuve pratique. — *Un fil pesant et homogène a une longueur de* 8^{m}, *il est attaché par ses extrémités à deux points fixes* A *et* B *qui sont sur une même horizontale et dont la distance est égale à* 4^{m}.

Trouver à un millimètre près la flèche de la chaînette décrite par le fil et trouver à un gramme près les tensions en A *et* B, *sachant que le fil pèse* 1^{kg} *par mètre.*

Astronomie.

Épreuve pratique. — *Calculer le volume* V *d'un parallélépipède oblique, connaissant les longueurs* a, b, c *des trois arêtes et les angles* α, β, γ *que ces arêtes font entre elles.*

1° *On démontrera la formule*

$$V=2abc\sqrt{\sin p\sin(p-\alpha)\sin(p-\beta)\sin(p-\gamma)},$$

où

$$2p=\alpha+\beta+\gamma;$$

2° *On appliquera cette formule aux données numériques suivantes :*

$a = 7^{\mathrm{m}},36592$	$\alpha = 62°.53'.17'',4$
$b = 6,72941$	$\beta = 65.48.56,7$
$c = 5,84326$	$\gamma = 68.34.48,5$

Calcul du volume d'un parallélépipède oblique

$$V = 2abc\sqrt{\sin p \sin(p-\alpha)\sin(p-\beta)\sin(p-\gamma)} = 2abc\Delta.$$

$a = 7^{\mathrm{m}},36592$	$\alpha = 62°.53'.17'',4$	$p = 98°.38'.31'',3$
$b = 6,72941$	$\beta = 65.48.56,7$	$p-\alpha = 35.45.13,9$
$c = 5,84327$	$\gamma = 68.34.48.5$	$p-\beta = 32.49.34,6$
	$2p = 197.17.\ 2,6$	$p-\gamma = 30.\ 3.42,8$

	Log.		Log.
$\sin p$........	$\bar{1},9950410$	2....	0,3010300
$\sin(p-\alpha)$. .	$\bar{1},766639\bar{1}$	a....	0,8672270
$\sin(p-\beta)$...	$\bar{1},734074\bar{3}$	b....	0,8279769
$\sin(p-\gamma)$...	$\bar{1},699781\bar{5}$	c....	0,7666552
Δ^2..........	$\bar{1},1955359$	Δ....	$\bar{1},5977679\bar{5}$
		V....	2,3606579$\bar{5}$

SOLUTION.

$$V = 229^{\mathrm{mc}},433624 = 229433^{\mathrm{lit}},624.$$

Montpellier.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Déterminer l'intégrale générale du système d'équations*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{bc}{a}x\frac{dz}{dx} + ay + bz = b(x+c),$$

$$x^2\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{ac}{b}x\frac{dy}{dx} - \frac{a^2}{b}y - az = -a(x+c),$$

où y et z sont deux fonctions de x.

Examiner les cas particuliers $c = 0$, $c = \pm 1$.

Épreuve pratique. — *Soit l'ellipsoïde rapporté à ses axes*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

et l'hyperboloïde

$$(x + h)^2 - 2a^2\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = (h - a)^2$$

où $0 < h < 3a$, *ces deux surfaces se coupent suivant une ellipse réelle située dans le plan*

$$x = a - \frac{2h}{3}.$$

On considère la portion d'ellipsoïde comprise entre cette ellipse et le plan $x = a$, *et la portion d'hyperboloïde comprise entre l'ellipse et le sommet de la même nappe. Déterminer le volume compris entre ces deux portions de surfaces.*

On pourra examiner séparément les deux cas suivants :

1° $\quad 0 < h < a$;

2° $\quad a < h < 3a$.

Astronomie.

Épreuve pratique. — *Les éléments de la planète* (24) *Thémis sont :*

$M = S = 165^\circ 24' 31'',2$, 1888, nov. 2,0. T. m. Berlin.

(*Distance nœud périhélie*).

$$\left.\begin{aligned} \omega &= 107^\circ.58'.42'',0 \\ \Omega &= 35.36.49,3 \\ i &= 0.48.12,1 \end{aligned}\right\} \text{éq. moy. 1900}$$

$$e = \sin\varphi.$$

$$\varphi = 7^\circ 40' 31'',1$$
$$\mu = 641'',1197$$
$$\log a = 0,4953786$$

On demande de calculer :

1° *L'instant où l'anomalie vraie* w *a pour valeur*

$$73^\circ 47' 40'';$$

2° *Au même moment, la réduction à l'écliptique* ρ *et les coordonnées polaires héliocentriques* r, v_1, s *par rapport à l'écliptique adopté.*

Mécanique rationnelle.

Épreuve écrite. — *Un anneau pesant, infiniment petit, est traversé par un fil flexible et inextensible, dépourvu de poids, le long duquel il peut glisser sans frottement. Ce fil est attaché, par ses extrémités, à deux points fixes* F *et* F' *situés sur une même verticale. Le fil étant tendu, et l'anneau occupant la position* M_0, *on imprime à l'anneau une vitesse horizontale, perpendiculaire au plan* FM_0F', *et égale à* V_0.

1° *Trouver le mouvement de l'anneau, en supposant que le fil reste tendu ;*

2° *Le point* M_0 *étant supposé au milieu du fil, calculer et étudier la tension du fil.*

Épreuve pratique. — 1° *Établir les formules qui font connaître la vitesse d'un point quelconque d'un solide, lorsque l'on donne les éléments du mouvement hélicoïdal instantané ;*

2° *Un tétraèdre solide* ABCD *est en mouvement dans l'espace. A un instant donné, la vitesse du sommet* A *est perpendiculaire au plan* BCD, *et tous les* *points d'un cercle donné, situé dans ce plan, ayant pour centre le pied de la hauteur issue de* A *et invariablement lié au tétraèdre, ont des vitesses égales à une même valeur donnée.*

Déterminer, pour l'instant considéré, les éléments du mouvement hélicoïdal instantané.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Solution du problème de Dirichlet par la méthode Poincaré (méthode dite du balayage). On se bornera au cas où la surface, frontière du domaine d'intégration, est dépourvue de singularités;*

2° *Calculer les composantes de la rotation moyenne en un point d'un milieu en déformation, lorsque ce milieu est rapporté à un système de coordonnées curvilignes rectangles.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une poutre horizontale, homogène et de section circulaire constante, appuyée librement en* o *et encastrée en* A, *est soumise, d'une part à une charge uniformément répartie* Q, *et d'autre part à une charge* P *appliquée au milieu* I *de la poutre. On demande :*

1° *De calculer le moment de flexion en un point de la poutre situé à une distance* x *de l'appui simple* o;

2° *D'indiquer le schéma graphique de la distribution de ce moment de flexion et de définir la position de la section dangereuse;*

3° *De calculer le rayon de la section de la poutre qui doit résister aux charges* Q *et* P *quand on prend les données numériques suivantes :*

Longueur de la poutre : $l = 18^{\text{m}}$. $\quad P = \frac{2}{3} Q,$

Q *étant le poids du volume d'eau qui, à la température de 4°, remplit une sphère d'un rayon égal à* 1m.

La charge par millimètre carré de la traction qui produit la rupture est supposée égale à 27kg. *La fraction de sécurité est prise égale à* $\frac{1}{6}$. *On néglige l'influence de l'effort tranchant.*

Nancy.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Choisir la fonction* $Q(x, y, z)$ *de façon que*

$$\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y}\right) dx + Q(x, y, z) dy + \frac{x}{y} dz$$

soit différentielle totale et intégrer cette différentielle.

II. *Rayon de courbure et centre de courbure en un point quelconque d'une courbe gauche.*

III. *On considère la courbe* (c) *qui, rapportée à des axes rectangulaires* ox, oy, oz, *est définie par les formules*

$$x = a\cos t + at\sin t,$$
$$y = a\sin t - at\cos t,$$
$$z = \frac{at^2}{2}\operatorname{tang}\varphi,$$

où t *désigne un paramètre variable,* a *et* φ *des constantes.*

1° *Calculer, pour un point quelconque de la courbe* (c), *la longueur de l'arc compté à partir du point pour lequel* $t = 0$ *et la longueur correspondante de l'arc de la projection de la courbe* (c) *sur le plan* xoy; *en conclure que la courbe est une hélice;*

2° *Déterminer, en un point quelconque de la* *courbe (c), le rayon de courbure, le rayon de torsion et les coordonnées du centre de courbure.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale curviligne*

$$\int y\,dx + z\,dy + x\,dz$$

prise le long du petit cercle d'intersection de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

par le plan

$$x + z - r = 0$$

dans le sens qui va de oz vers ox en passant dans le trièdre positif des coordonnées.

Algèbre supérieure.

Épreuve écrite. — *On considère la fonction pu de Weierstrass construite avec les périodes* 2ω *et* $2\omega'$.

1° *Vérifier la formule*

$$p(2u) + 2pu = \frac{1}{4}\left(\frac{p''u}{p'u}\right)^2.$$

2° *Si l'on pose* $x = pu$, *on a*

$$p(2u) = \Phi(x),$$

$\Phi(x)$ *étant une fonction rationnelle de* x;

3° *Les racines de l'équation du quatrième degré en* x

$$\Phi(x) - p(2u) = 0$$

sont

$$pu,\quad p(u+\omega),\quad p(u+\omega+\omega'),\quad p(u+\omega')$$

et l'on a la relation

$$4p(2u) = pu + p(u+\omega) + p(u+\omega+\omega') + p(u+\omega').$$

4° *Vérifier que la fonction rationnelle* $\Phi(x)$ *décom-*

posée en fractions simples peut s'écrire

$$4\Phi(x) = x + \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{x-e_1} + \frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{x-e_2} + \frac{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{x-e_3},$$

en posant, suivant l'usage,

$$e_1 = p\omega, \qquad e_2 = p(\omega+\omega'), \qquad e_3 = p\omega'.$$

5° *Si, dans la fonction rationnelle* $\Phi(x)$, *on effectue la substitution*

$$x = e_1 + \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{x_0-e_1},$$

$\Phi(x)$ *se transforme identiquement en* $\Phi(x_0)$;

6° x_0 *étant une constante donnée, exprimer en fonction de* x_0 *les racines de l'équation du quatrième degré*

$$\Phi(x) = \Phi(x_0).$$

7° *On peut déduire de ce qui précède que si l'on effectue la substitution*

$$y = \Phi(x)$$

dans l'expression différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{4y^3-g_2y-g_3}},$$

elle se transforme identiquement en

$$\frac{2\,dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}.$$

1° et 2° La formule à démontrer se déduit immédiatement de la formule d'addition

$$p(u+v) + pu + pv = \frac{1}{4}\left(\frac{p'v-p'u}{pv-pu}\right)^2$$

en y faisant tendre v vers u; et, pour obtenir $\Phi(x)$, il n'y a plus qu'à remplacer $p'^2 u$ et $p'' u$ par leur valeur en fonction de $x = pu$.

3° Si l'on pose $x = pu'$, l'équation $\Phi(x) - p(2u) = 0$ devient

$$p(2u') = p(2u)$$

et elle entraîne

$$u' = u + m\omega + n\omega',$$

m et n désignant des nombres entiers.

La relation

$$p(2u) = pu + p(u+\omega) + p(u+\omega+\omega') + p(u+\omega')$$

s'obtient en remarquant que la somme des racines de l'équation du quatrième degré est $4p(2u)$, ou encore en décomposant $p(2u)$ en éléments simples.

4° La décomposition de $\Phi(x)$ en fractions simples résulte immédiatement de la relation précédente et des formules relatives à l'addition d'une demi-période.

5° Si l'on ajoute la demi-période ω à u dans chacun des termes de la somme

$$pu + p(u+\omega) + p(u+\omega+\omega') + p(u+\omega'),$$

le premier et le second, le troisième et le quatrième de ces termes s'échangent entre eux; mais ajouter ω à u c'est remplacer x par

$$x' = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{x - e_1}.$$

6° Les racines de l'équation $\Phi(x) = \Phi(x')$ sont

$$x', \quad e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{x' - e_1}, \quad e_2 + \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{x' e_2},$$
$$e_3 + \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{x' - e_2}.$$

7° Si l'on pose $x = pu$, il en résulte

$$y = \Phi(x) = p(2u),$$

puis

$$\frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = du, \qquad \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = 2\,du.$$

Remarque. — La fonction rationnelle $\Phi(x)$ peut se déduire de la fraction

$$\frac{h(x)}{\psi(x)}$$

où

$$\psi(x) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4,$$

et où $h(x)$ est le covariant hessien de $\psi(x)$, en faisant, après le calcul du hessien,

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = -\tfrac{1}{4} g_2, \qquad a_4 = -g_3.$$

En s'appuyant sur cette remarque, et en se servant de la relation entre les invariants et les covariants d'une forme biquadratique, on peut vérifier par un calcul direct l'égalité

$$\frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = \frac{2\,dx}{\sqrt{4x^3 - y_2 x - g_3}}$$

indiquée dans la septième partie de l'énoncé.

Voir à ce sujet Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, p. 360, le paragraphe intitulé : *Formule de duplication*.

Épreuve pratique. — *Étant donnée l'équation qui fournit la valeur de* $\operatorname{tang}\frac{a}{3} = \frac{x}{y}$ *en fonction de* $\operatorname{tang} a = \frac{\lambda}{\mu}$, *appliquer la théorie des invariants de la forme binaire cubique à la réduction du premier membre de cette équation à la forme canonique et à sa résolution algébrique.*