NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E.-M. LÉMERAY

Exposition géométrique élémentaire de quelques propriétés fondamentales des fonctions elliptiques de première espèce

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 255-275

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__255_1>

[F8f] [H11d]

EXPOSITION GÉOMÉTRIQUE ÉLÉMENTAIRE DE QUELQUES PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES FONCTIONS ELLIPTIQUES DE PREMIÈRE ESPÈCE;

PAR M. E.-M. LÉMERAY.

C'est par le calcul intégral que les fonctions elliptiques se sont introduites dans la Science, et c'est dans le calcul intégral qu'il faut puiser les démonstrations de leurs propriétés et les méthodes de calcul si l'on veut de la rigueur et de la généralité. Mais l'emploi des intégrales prises entre des limites imaginaires fait appel à des connaissances peu familières au début; et, tout en laissant de côté les méthodes de calcul des fonctions elliptiques, il y a profit à se rendre compte auparavant, par des moyens plus simples, de leurs propriétés principales et en particulier de leur double périodicité. C'est ce qu'on a essayé de faire dans ce Travail au moyen d'une représentation géométrique qui fût la *généralisation d'une représentation convenable des fonctions circulaires*.

Nous considérerons les anciennes fonctions elliptiques sn, cn et dn, en nous bornant même à la première à laquelle les deux autres se ramènent facilement, puis nous dirons quelques mots de la fonction $\wp$ de Weierstrass.

Comme sn dégénère soit en sinus, soit en tangente hyperbolique, nous examinerons d'abord ces deux fonctions et, avec plus de détails, la première, la plus familière, pour laquelle la représentation géométrique sera bien facile à comprendre. La méthode s'étendra ensuite tout naturellement à la seconde et au cas général de sn.

Notre point de départ sera le théorème d'addition.

I. — Sinus.

1. Considérons d'abord une fonction de p que nous appellerons $\sin p$ telle que l'on ait

1° $\sin(p+q) = \sin p\sqrt{1-\sin^2 q} + \sin q\sqrt{1-\sin^2 p}$,

2° $\sin O = 0$,

3° $\left(\dfrac{d\sin p}{dp}\right)_{p=0} = 1.$

Nous admettrons ici qu'une telle fonction existe ([1]).

Supposons p constant et q variable; posons

$$\sin p = a, \qquad \sin q = x, \qquad \sin(p+q) = y,$$

on a

$$y = a\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-a^2}. \tag{1}$$

Nous supposerons a réel positif plus petit que 1, et x réel et plus petit que 1 en valeur absolue.

([1]) Abel a donné (*Œuvres complètes*, t. I, p. 64; 1881) les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une relation donnée

$$\Xi[F(p)F(q)]$$

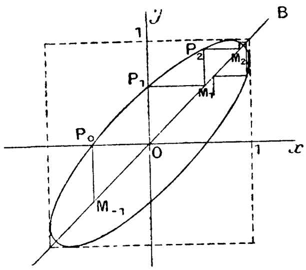
entre $F(p)$ et $F(q)$ représente un théorème d'addition. Il faut que Ξ ne change pas quand on permute p et q. Il faut de plus que, si l'on remplace $F(q)$ par $\Xi[F(q), F(r)]$ la fonction

$$\Xi\{Fp.\Xi[F(q).F(r)]\}$$

ne change pas quand on permute p, q et r.

Sur deux axes rectangulaires Ox, Oy (*fig.* 1) con-

Fig. 1.

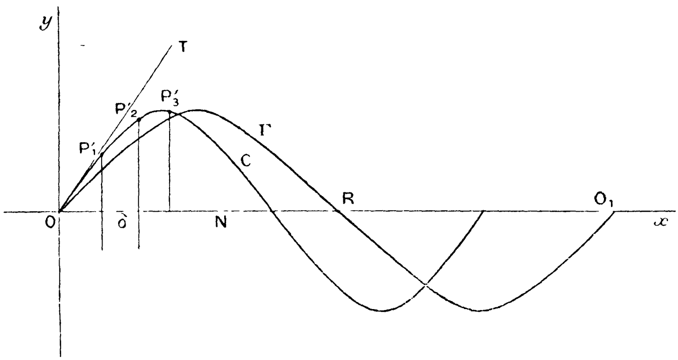


struisons la courbe représentée par l'équation (1). C'est une ellipse dont le grand axe est dirigé suivant la bissectrice positive de l'angle xOy; elle est tangente aux quatre droites $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. Les deux racines de l'équation $y = x$, sont plus petites que 1 en valeur absolue.

2. Cela posé, partons du point P_0 où l'ellipse coupe la partie négative de l'axe Ox et traçons la ligne brisée $P_0OP_1M_1P_2\ldots$ dont les côtés sont tour à tour parallèles à Ox et à Oy; dont les sommets sont alternativement sur l'ellipse et sur la bissectrice positive OB de l'angle xOy, et en ayant soin de *prendre parmi les deux intersections, quand elles sont distinctes, d'une verticale avec l'ellipse celle qui n'est pas symétrique* (P_2 par exemple) *du point précédent* (P_1) *par rapport à* OB.

D'autre part, sur deux axes rectangulaires Oz, Oy, construisons une courbe C de la manière suivante : Marquons sur Oz les points d'abscisses δ, 2δ, ... δ étant une longueur arbitraire, puis, aux ordonnées correspondantes, les points P'_1, P'_2, ... ayant mêmes ordonnées que M_1, M_2, ... ou, ce qui revient au même, que P_1, P_2, ... (*fig.* 2) et faisons passer par l'origine et par ces

Fig. 2.



points une courbe continue C. Menons la tangente OT à l'origine, mesurons le coefficient angulaire t de cette tangente; puis traçons une courbe Γ d'ordonnées égales à celles de C, mais d'abscisses t fois plus grandes. La courbe Γ représente la fonction $\sin z$ comme on le verra tout à l'heure.

Il faut avant tout donner un sens précis à l'opération qui consiste à faire passer une courbe continue par les points O, P'_1, P'_2, ...

3. Montrons d'abord qu'on peut trouver une valeur a_1 telle que l'ellipse

$$y = a_1\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{1 - a_1^2}$$

permette d'obtenir un nombre de points deux fois plus grand que la première; je veux dire qu'elle fournisse les points donnés par la première, et de plus d'autres points situés chacun entre deux des premiers. Soient Q_1, Q_2, ... les points obtenus sur la seconde ellipse;

Q_1, Q_2 sont les analogues de P_1, P_2, ... on a

$$\text{ordonnée } Q_1 = a_1, \qquad \text{ordonnée } Q_2 = 2a_1\sqrt{1-a_1^2}.$$

En écrivant que les ordonnées de P_1 et Q_2 sont égales, on a une équation d'où l'on tire pour a_1

$$a_1 = \pm\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{1-a^2}}{2}}.$$

De ces quatre valeurs nous laisserons de côté les valeurs négatives, puisque, par convention, le paramètre qui définit l'ellipse doit être positif; pour voir laquelle des deux valeurs positives nous devons choisir, supposons a très petit. Pour qu'il y ait continuité, il faut que l'ordonnée de Q_1 soit comprise entre zéro et l'ordonnée de Q_2, c'est-à-dire

$$0 < a_1 < a.$$

Cela ne peut avoir lieu si l'on prend

$$a_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{2}},$$

car l'on aurait

$$2a_1^2 < 1+\sqrt{1-a^2} \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{1-a^2} < 2a_1^2 - 1,$$

ce qui est impossible, le premier membre de la seconde inégalité étant positif, et le second étant négatif pour peu que a soit plus petit que $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Il faut donc prendre

$$a_1 = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{2}}.$$

Montrons maintenant généralement que si le point $Q_{2\mu}$ (μ entier) de l'ellipse de paramètre a_1, a même ordonnée que le point P_μ de l'ellipse de paramètre a, les points $Q_{2\mu+2}$ de la première et $P_{\mu+1}$ de la seconde auront aussi même ordonnée. Soit y l'ordonnée de $Q_{2\mu}$

et de P_μ; on a d'une part

$$\text{ordonnée } P_{\mu+1} = a\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-a^2}$$

et remplaçant a par sa valeur $2a_1\sqrt{1-a_1^2}$

$$\text{ordonnée } P_{\mu+1} = 2a_1\sqrt{1-a_1^2}\sqrt{1-y^2} + y(1-a_1^2).$$

D'autre part soient η_1, η_2 les ordonnées de $Q_{2\mu+1}$ et $Q_{2\mu+2}$, on a

$$\eta_1 = a_1\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-a_1^2} \qquad \eta_2 = a_1\sqrt{1-\eta_1^2} + \eta_1\sqrt{1-a_1^2},$$

d'où

$$\begin{aligned} 1-\eta_1^2 = {} & 1 - a_1^2(1-y^2) \\ & - 2a_1y_1\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-a_1^2} - y^2(1-a_1^2), \end{aligned}$$

ou

$$1-\eta_1^2 = \left(\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-a_1^2} - a_1y\right)^2.$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \eta_2 = {} & a_1\left[\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-a_1^2} - a_1y\right] \\ & + a_1\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-a_1^2} + y(1-a_1^2), \end{aligned}$$

$$\eta_2 = 2a_1\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-a_1^2} + y(1-2a_1^2) = \text{ordonnée } P_{\mu+1}.$$

Toutes les valeurs qui représentent les ordonnées des points P, se retrouvent ainsi parmi les valeurs des ordonnées des points Q; donc si l'on fait le tracé de la *fig.* 2 en partant de l'ellipse de paramètre a_1 et en prenant pour équidistance $\frac{\delta}{2}$ au lieu de δ on obtient une suite de points parmi lesquels se trouvent les points obtenus d'abord.

On peut ensuite déterminer un nouveau paramètre a_2 par la relation

$$a_2 = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a_1^2}}{2}}$$

et prendre pour équidistance $\frac{\delta}{2^2}$, etc. On aurait ainsi une suite de points de plus en plus rapprochés pour déterminer la courbe C.

Voici maintenant une remarque dont nous aurons besoin. Les quantités a, a_1, a_2, ... tendent vers zéro; l'on trouve aisément

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}.$$

Soit ε la valeur de a_n; construisons une courbe telle que C en partant de l'ellipse de paramètre ε et en prenant pour équidistance $\delta = \varepsilon$. On peut prendre n assez grand pour que ε soit plus petit qu'une quantité assignée d'avance, si petite qu'elle soit; à la limite le coefficient angulaire t de la tangente à l'origine à la courbe C est égal à 1; et cette courbe C se confond avec Γ.

Enfin l'on arrive au même résultat si l'on prend pour ε une quantité infiniment petite quelconque, car l'on pourrait déterminer a de manière que a_n eût une valeur donnée.

Il résulte de là que nous pourrons, dans la suite, partir d'ellipses dont le paramètre a (tout en restant positif et plus petit que 1) peut avoir, soit une valeur quelconque, soit certaines valeurs finies, soit une valeur infiniment petite, et *les résultats obtenus dans chaque cas particulier seront applicables à tous les autres cas.*

4. Vérifions que la fonction représentée par la courbe Γ satisfait aux trois conditions imposées. Pour démontrer que l'on a (p et z étant toutefois réels)

$$\sin(p+z) = \sin p\sqrt{1-\sin^2 z} + \sin z\sqrt{1-\sin^2 p},$$

il suffit de supposer que le paramètre a de l'ellipse est égal à $\sin p$. Si l'on prend sur l'ellipse (*fig.* 1) un point dont l'abscisse soit égale à $\sin z$, son ordonnée sera

$$a\sqrt{1-\sin^2 z} + \sin z\sqrt{1-a^2} = \sin(p+z).$$

Valeur et dérivée à l'origine. — D'après la manière même dont on construit la courbe Γ, on a

$$\sin(0) = 0, \qquad \left(\frac{d \sin z}{dz}\right)_{z=0} = 1,$$

l'origine est un zéro de la fonction, et c'en est un zéro simple.

5. *Équation différentielle.* — Supposons maintenant que l'on soit parti d'une ellipse définie par une valeur très petite du paramètre a et que l'on ait pris $\delta = a$ comme équidistance dans la construction de la courbe C. Soient P_μ, $P_{\mu+1}$ deux des sommets successifs de polygone sur l'ellipse, d'ordonnées y_μ et $y_{\mu+1}$; la différence des ordonnées des deux points correspondants de la courbe Γ est $y_{\mu+1} - y_\mu$, la différence de leurs abscisses est a, la sécante a pour coefficient angulaire

$$\frac{y_{\mu+1} - y_\mu}{a};$$

mais OB étant la bissectrice de l'angle xoy, le point de l'ellipse qui a pour ordonnée $y_{\mu+1}$ a pour abscisse y_μ. Le coefficient angulaire est donc

$$\frac{a\sqrt{1-y_\mu^2} + y_\mu\sqrt{1-a^2} - y_\mu}{a};$$

quand a tend vers zéro, ce rapport tend vers

$$\sqrt{1-y_\mu^2},$$

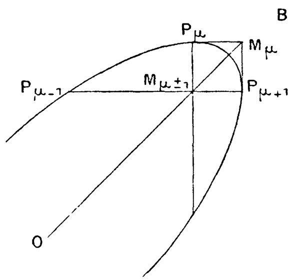
a est à la limite l'accroissement dz de z ; si l'on remplace généralement y_μ par y, on a

$$\frac{dy}{dz} = \sqrt{1-y^2}.$$

Période. — On a vu, au nº **2**, qu'il faut choisir parmi deux intersections supposées distinctes de l'ellipse avec une parallèle à Oy, celle qui n'est pas symétrique du point précédent par rapport à OB. En général, les deux intersections seront distinctes; mais il est facile de voir que par continuité il y a des valeurs de a telles qu'un élément horizontal de la ligne brisée est tangent à l'ellipse et que le fait se produit dès le premier tour fait sur l'ellipse par une mobile la parcourant dans le sens $\searrow$ et rencontrant les points P_1, P_2, ...

Soit M_μ le point où OB coupe le côté P_μ, M_μ de la ligne brisée parallèle à ox et tangent à l'ellipse (*fig.* 3).

Fig. 3.



L'ellipse admettant les deux bissectrices pour axes de symétrie, l'on a

$$\text{ordonnée } P_{\mu-1} = \text{abscisse } P_\mu = \text{ordonnée } P_{\mu+1}.$$

$M_{\mu-1}$ et $M_{\mu+1}$ sont confondus; et ainsi de suite. La ligne brisée constitue donc un polygone fermé ayant les bissectrices pour axes de symétrie et *l'on reviendra au point* P_0 *après un certain nombre* (*entier*) *d'opérations. La fonction* sin z *est donc périodique.*

Il résulte encore de cette symétrie que, si l'on désigne par $\frac{\pi}{2}$ la plus petite valeur de z pour laquelle la fonction est maximum (égale à 1), on a

$$1^\circ \qquad \sin\pi = 0, \qquad \sin\frac{3\pi}{2} = -1, \qquad \sin 2\pi = 0;$$

$$2^\circ \quad \sin(-z) = -\sin z, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right).$$

La longueur oo' (*fig.* 2) représente la période 2π. La distance $\mathrm{OR} = 3,14, \ldots$ représente la demi-période.

6. Nous allons voir maintenant que, quand la variable est purement imaginaire, il en est de même de la fonction. Soit j une valeur complexe de z, telle que la fonction prenne la valeur purement imaginaire $a\sqrt{-1}$, où a est réel. Si, au théorème d'addition, nous remplaçons dans le second membre a et x par $a\sqrt{-1}$, il devient

$$2a\sqrt{-1}\sqrt{1+a^2};$$

il est donc encore purement imaginaire et nous pouvons l'écrire $y\sqrt{-1}$, y étant réel; en substituant la valeur ainsi trouvée à x (ce qui est la traduction analytique du procédé géométrique du n° 2) nous aurons une nouvelle valeur encore purement imaginaire

$$a\sqrt{-1}\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{-1}\sqrt{1+a^2}, \quad \ldots;$$

donc, pendant que la fonction prend la valeur zéro et les valeurs purement imaginaires que nous venons d'obtenir, la variable prend les valeurs o, j, $2j$, $3j$, ... Soient $u + v\sqrt{-1}$ une valeur de la variable et $\mathrm{U} + \mathrm{V}\sqrt{-1}$ la valeur correspondante de la fonction. Représentons sur deux axes rectangulaires ou, ov la valeur de la variable par un point d'abscisse u et d'ordonnée v, et sur deux autres axes rectangulaires OU, OV, la valeur de la fonction par un point d'abscisse U et d'ordonnée V. D'après ce qu'on vient de voir, quand la fonction prend les valeurs qu'on vient d'obtenir et qui sont situées sur l'axe imaginaire OV, les valeurs correspondantes de la variable sont situées sur une droite du plan *uov* passant à l'origine. Comme au n° 3, on peut prendre a assez petit pour que z puisse être considéré comme le produit d'un entier assez grand μ par un nombre complexe assez petit j, d'argument constant. Alors, quand la fonction décrit l'axe OV, la variable décrit une droite passant à l'origine.

Il reste à montrer que cette droite est nécessairement l'axe *ov*, sans quoi la fonction ne serait pas analytique.

En effet, l'on sait que pour une telle fonction les relations entre u et v, représentées par les conditions

$$U = 0, \qquad V = 0,$$

sont figurées dans le plan *uov* par des courbes qui se coupent aux points racines de la fonction, et que si l'un de ces zéros est un zéro simple, les deux courbes qui y passent se coupent orthogonalement. Dans le cas que nous considérons, les deux courbes sont des droites; elles sont donc perpendiculaires : l'une étant l'axe *ou*, l'autre est l'axe *ov*.

7. *Période imaginaire.* — Dans le cas de la variable réelle, nous l'avons considérée comme le produit d'un nombre réel par un entier, μ, qui indique le nombre d'opérations par lesquelles on passe d'un point P au suivant. Ici, nous le considérons comme le produit d'un nombre imaginaire par un nombre entier *gardant la même signification concrète que tout à l'heure*. Appelons *conjuguée* d'une fonction donnée la fonction *réelle* définie par le théorème d'addition de la première après que l'on y a remplacé y, a et x par $y\sqrt{-1}$, $a\sqrt{-1}$

et $x\sqrt{-1}$. Toute fonction donnée n'admet pas nécessairement une conjuguée ([1]). Quand le fait se produit, la période imaginaire d'une fonction s'interprète facilement. *C'est, au facteur* $\sqrt{-1}$ *près, la période réelle de sa conjuguée et réciproquement.*

8. En remplaçant, dans l'équation (1), y, a et x par $y\sqrt{-1}$, $a\sqrt{-1}$ et $x\sqrt{-1}$, il vient

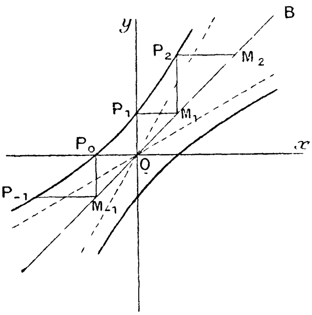
$$y\sqrt{-1} = a\sqrt{-1}\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{-1}\sqrt{1+a^2},$$

ou

$$(2)\qquad y = a\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+a^2}.$$

Appliquons la même représentation géométrique qu'à l'équation (1). La courbe (2) est une hyperbole (*fig.* 4)

Fig. 4.



qui admet les bissectrices pour axes; la bissectrice positive OB étant l'axe non transverse, ses asymptotes ont des coefficients angulaires positifs qui ne sont ni nuls ni infinis.

([1]) Telles sont, par exemple, e^x et la fonction p dont on parlera plus loin. Pour qu'il y ait une conjuguée, il faut que la fonction donnée soit réelle ou purement imaginaire en même temps que la variable.

Si l'on trace la ligne brisée $P_{-1}M_{-1}P_0OP_1M_1$ définie de la même manière que précédemment, on voit que les ordonnées des points obtenus croissent ou décroissent indéfiniment. En traçant les courbes analogues aux courbes C et Γ, on a la courbe représentant la fonction qui satisfait au théorème d'addition (2). Si l'on fait en sorte que la courbe ait pour coefficient angulaire à l'origine l'unité, elle représente la fonction désignée sous le nom de *sinus hyperbolique*. Pour $z = \pm\infty$ on a $\mathrm{Sh}(z) = \pm\infty$.

On voit que si l'on suit la ligne brisée toujours dans le même sens, on ne revient jamais au point de départ. $\mathrm{Sh}\, z$ n'a donc pas de période réelle; sa conjuguée $\sin z$ *n'a donc pas la période imaginaire*. C'est ce résultat qu'il nous importait de connaître.

9. De la définition de la fonction $\mathrm{Sh}\, z$ donnée au n° 8, il résulte qu'on a

$$\sin(z\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\,\mathrm{Sh}\, z.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'attacher un sens à la fonction $\sin z$ quand z prend une valeur complexe de la forme $u + v\sqrt{-1}$. En appliquant le théorème d'addition on a

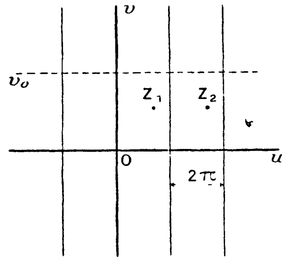
$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sin(u + v\sqrt{-1}) \\ &\quad = \sin u\sqrt{1 - (\sin v\sqrt{-1})^2} + \sin(v\sqrt{-1})\sqrt{1 - \sin^2 u} \\ &\quad = \sin u\sqrt{1 + \mathrm{Sh}^2 v} \qquad\quad + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sh}\, v \quad \sqrt{1 - \sin^2 u} \end{aligned} \right.$$

de la forme

$$U + V\sqrt{-1}.$$

Si donc l'on se donne v et que l'on fasse varier u, la fonction $\sin(u + v\sqrt{-1})$ reprend la même valeur chaque fois que $\sin u$ reprend la même valeur, c'est-à-dire quand u varie de $2m\pi$ (m entier). Par suite, si dans le plan uov (*fig.* 5) l'on trace des parallèles à ov

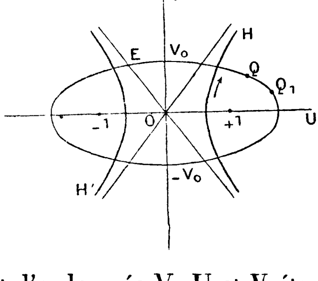
Fig. 5.



distantes de 2π, on pourra dire que, chaque fois que z prend des valeurs représentées par des points tels que Z_1, Z_2 ayant dans chaque bande des positions relatives semblables, la fonction $\sin z$ reprend la même valeur.

10. Aux n^{os} 1 et 8, nous avons examiné le cas où la variable est purement réelle, et celui où elle est purement imaginaire. Nous allons maintenant nous rendre compte de ce qui se passe quand z décrit une parallèle à l'axe ou. Chacune des valeurs de la fonction est représentée en coordonnées U et V (*fig.* 6) par un point

Fig. 6.



d'abscisse U et d'ordonnée V, U et V étant les fonctions réelles définies par l'équation (3),

$$U = \sin u \sqrt{1 + \mathrm{Sh}^2 v}, \qquad V = \mathrm{Sh}\, v \sqrt{1 - \sin^2 u}.$$

Soit v_0 l'ordonnée de la parallèle à ou décrite par z (*fig.* 5); et soit V_0 la valeur correspondante de la fonction; quand z prend les valeurs $u + v_0\sqrt{-1}$, la fonction est

$$\sin(u + v_0\sqrt{-1}) = \sin u \sqrt{1 + \mathrm{Sh}^2 v_0} + \sqrt{-1}\, \mathrm{Sh}\, v_0 \sqrt{1 - \sin^2 u}.$$

Posons $\sin u = \xi$; on aura

$$\begin{aligned} U - \xi\sqrt{1 + V_0^2} &= 0, \\ V - V_0\sqrt{1 - \xi^2} &= 0. \end{aligned}$$

En éliminant ξ entre ces deux équations, nous aurons

$$\frac{U^2}{1 + V_0^2} + \frac{V^2}{V_0^2} = 1, \tag{4}$$

ellipse ayant pour foyers les points $U = \pm 1$ et coupant l'axe oV en $\pm V_0$; à chaque valeur de V_0 correspond une ellipse déterminée. Ces ellipses jouiront de la propriété suivante.

La valeur de la fonction est représentée par un point Q du plan UOV; z a alors dans son plan, ou plutôt dans une quelconque des bandes du plan uov, une position déterminée; quand, à partir de ce point, z décrit une parallèle à ou, la fonction décrit dans le plan UOV l'ellipse de foyer ± 1 passant par le point Q.

En appliquant la même méthode au cas où z décrit une parallèle à l'axe ov, on trouve pour représenter les variations de $\sin z$ les hyperboles (*fig.* 6)

$$\frac{U^2}{U_0^2} - \frac{V^2}{1 - U_0^2} = 1$$

homofocales aux ellipses et qui, par suite, *les coupent orthogonalement*.

11. Nous avons vu que $\sin z$ admet une période réelle et n'a pas de période imaginaire. C'est ce que montre bien la *fig.* 6; chaque fois que z varie de 2π et passe dans une autre bande au point correspondant, le mobile qui décrit l'ellipse E toujours dans le même sens revient à son point de départ.

Cela n'aurait pas lieu si le mobile tendait vers un point limite sur l'ellipse; il est facile de voir qu'il n'en peut être ainsi. Soit, en effet, Q un point quelconque de l'ellipse d'ordonnées U et V; la fonction prend la valeur

$$X = U + V\sqrt{-1}.$$

Nous calculerons les coordonnées U_1 V_1 au point Q_1 par la relation

$$X_1 = a\sqrt{1 - X_1^2} + X_1\sqrt{1 - a^2}.$$

Si le mobile tendait vers une position limite x sur l'ellipse, on aurait

$$x_1 = a\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{1 - a^2} = x;$$

or les deux valeurs de x satisfaisant à cette équation (n° 1 et *fig.* 1) sont réelles et comprises entre -1 et $+1$. Comme aucune des ellipses (*fig.* 6) (sauf l'ellipse limite) ne coupe l'axe réel entre ces points, le mobile ne peut tendre sur aucune ellipse vers une position limite. Il ne pourrait en être ainsi que pour l'ellipse limite qui se confond avec l'axe réel; mais on a déjà examiné ce cas. Le mobile revient donc à son point de départ, les ellipses étant des courbes fermées.

Quand z varie au contraire le long d'une parallèle à ov, le mobile décrit une branche d'hyperbole dans un sens constant et l'on pourrait voir qu'il ne peut venir sur l'autre branche en passant par l'infini; les branches d'hyperboles étant infinies, le mobile ne revient jamais à son point de départ.

12. Comme complément aux résultats du n° **10**, nous énoncerons les propositions suivantes :

1° *Quand z décrit dans son plan une droite faisant un angle φ avec ou,* sin z *décrit dans son plan une courbe qui coupe toutes les ellipses de foyers* ± 1 *sous un angle constant;* et, plus généralement,

2° Quand z décrit dans son plan un chemin quelconque R, sin z décrit dans son plan un chemin S; à chaque point r de R correspond un point s de S; *l'angle que fait en s le chemin* S *avec l'ellipse de foyers* ± 1 *qui passe en ce point est égal à l'angle que fait le chemin* R *avec une parallèle à ou menée par r.*

La méthode étant maintenant exposée pour le cas de sin z, nous examinerons les autres fonctions plus rapidement; nous montrerons principalement comment se transforment les résultats qu'on vient d'obtenir.

II. — Tangente hyperbolique.

13. Considérons maintenant une fonction, que nous appellerons *tangente hyperbolique,* satisfaisant aux conditions

$$\mathrm{Th}(p+q) = \frac{\mathrm{Th}\,p + \mathrm{Th}\,q}{1 + \mathrm{Th}\,p\,.\,\mathrm{Th}\,q},$$

$$\mathrm{Th}(0) = 0, \qquad \left(\frac{d\,\mathrm{Th}\,p}{dp}\right)_{p=0} = 1.$$

Posons $\mathrm{Th}\,p = a$, $\mathrm{Th}\,q = x$, $\mathrm{Th}(p+q) = y$; la courbe

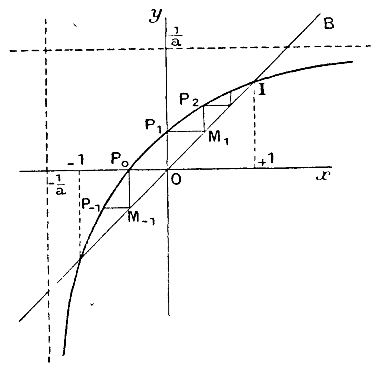
$$y = \frac{a+x}{1+ax},$$

où a est supposé plus petit que 1, est une hyperbole équilatère (*fig.* 7) qui admet pour asymptotes les droites

$$x = -\frac{1}{a}, \qquad y = \frac{1}{a},$$

Elle coupe la bissectrice OB aux points dont les abscisses sont ± 1. Au point I la tangente à l'hyperbole a pour coefficient angulaire une quantité positive plus petite que 1, tant que a est, comme nous l'avons supposé, plus petit que 1. En s'appuyant sur cette remarque on démontrerait aisément que le chemin $P_0 O P_1 M_1 P_2 \ldots$ s'approche indéfiniment du point I. Si donc nous traçons comme au n° 2 des courbes analogues à C et à Γ (cette dernière ayant l'unité pour coefficient angulaire à l'origine), la courbe Γ qui représentera $\operatorname{Th} z$ sera formée d'une branche infinie dans les deux sens, asymptote à la droite $y = 1$ pour $z = +\infty$ et à la droite $y = -1$ pour $z = -\infty$ et dont toutes les ordonnées seront plus petites que 1 en grandeur absolue. La *fig.* 7 montre que, si l'on parcourt

Fig. 7.



la ligne brisée toujours dans le même sens, on ne revient jamais au point de départ. *La fonction* $\operatorname{Th} z$ *n'a donc* *pas de période réelle*. Par la méthode du n° 4, on verra que la fonction $\mathrm{Th}\, z$ satisfait à l'équation

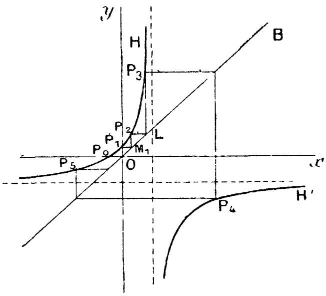
$$\frac{dy}{dz} = 1 - y^2.$$

14. Considérons maintenant la fonction conjuguée que nous appellerons $\tan z$; son théorème d'addition est représenté par l'équation

$$y = \frac{a+x}{1-ax}.$$

C'est une hyperbole équilatère (*fig.* 8) qui admet

Fig. 8.



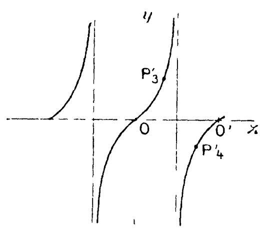
pour asymptotes les droites

$$x = \frac{1}{a}, \qquad y = -\frac{1}{a}.$$

En suivant le chemin $P_0 O P_1 M_1 \ldots$ on remarque une circonstance nouvelle : les ordonnées des points P_1, P_2, ... croissent d'abord, puis tout d'un coup un point (P_n sur la figure) prend une ordonnée négative inférieure à $-\frac{1}{a}$, puis le suivant a une ordonnée plus grande que

— $\frac{1}{a}$; enfin, après un certain nombre d'opérations on se trouve ramené dans la région de la courbe où se trouvent les points $P_0, P_1, \ldots$; cela montre tout d'abord que tang z *est périodique et qu'elle a une période réelle.* Si l'on trace les courbes analogues à C et à Γ (cette dernière satisfaisant toujours à la même condition, en ce qui regarde le coefficient angulaire à l'origine), la *fig.* 9 obtenue ainsi représente la fonction tang z. Par la

Fig. 9.



méthode du n° 4 on verra qu'elle satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dz} = 1 + y^2.$$

15. Voyons maintenant ce qui se passe entre les points P_3 et P_n de la figure; *la fonction* tang z *passe par* $\pm\infty$. En effet, remarquons comme pour sin z que les fonctions tang z auxquelles ont est amené pour des valeurs différentes de a sont identiques. Nous pourrons donc raisonner en attribuant à a une valeur quelconque. Prenons a tel que parmi les points $P_1, P_2, \ldots$ il y en ait un, P_μ, par exemple, dont l'ordonnée soit égale à celle du point L, intersection de la bissectrice OB avec l'asymptote parallèle à Oy (*fig.* 8); en donnant à M_μ le même sens qu'au n° 2, M_μ se confondra avec L;

pour obtenir le point suivant $P_{\mu+1}$ nous menons par M_μ la parallèle à Oy. Cette parallèle est l'asymptote elle-même; elle rencontre la courbe à $\pm\infty$; on peut donc indifféremment prendre $P_{\mu+1}=\pm\infty$, puisque les deux points ainsi définis *ne sont ni l'un ni l'autre symétriques de* P_μ *par rapport à* OB; tang z passe donc pour certaines valeurs de z du positif au négatif en devenant infinie. C'est ce qui nous explique pourquoi, sur la *fig.* 8, les points P_3 et P_n ont des ordonnées de signes contraires et très différentes même si a est très petit. Enfin il est facile de voir que, quel que soit le point $P_{\mu+1}$ qu'on a choisi, on retrouve pour ordonnées de $P_{\mu+2}$ et des suivants les mêmes valeurs. Si l'on prend $P_{\mu+1}=+\infty$, la parallèle à Ox menée par ce point coupe OB en un point $M_{\mu+1}$ de coordonnées $x=+\infty$, $y=+\infty$; la parallèle à Oy menée par $M_{\mu+1}$ rencontre l'hyperbole (branche H') en un point $P_{\mu+2}$ de coordonnées $x=+\infty$, $y=0$.

Si l'on prend $P_{\mu+1}=-\infty$, on trouve pour $M_{\mu+1}$ les coordonnées $x=-\infty$, $y=-\infty$, et pour $P_{\mu+2}$ les coordonnées $x=-\infty$, $y=0$; on voit donc que dans les deux cas l'ordonnée de $P_{\mu+2}$ est nulle. Il en résulte que $P_{\mu+3}$, $P_{\mu+n}$ *sont des points à détermination unique.*

(*A suivre*) [1].