Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 237-239

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__237_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1789.

(1898, p. 148)

Les cordes communes à l'ellipse et à ses cercles osculateurs en deux points conjugués se rencontrent sur une courbe ayant même aire que l'ellipse.

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

Soient $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$ les coordonnées d'un point P de l'ellipse. La corde commune à l'ellipse et à son cercle osculateur au point P coupe la conique en un second point P' de coordonnées $x = a\cos 3\varphi$, $y = -b\sin 3\varphi$, conséquence d'un théorème bien connu sur la somme des angles excentriques des points d'intersection d'un cercle avec une ellipse.

La corde PP' aura donc pour équation

$$bx\cos\varphi - ay\sin\varphi = ab\cos 2\varphi.$$

On trouvera la corde correspondant à un point conjugué de P en remplaçant φ par $ya + \varphi$, d'où

$$bx\sin\varphi + ay\cos\varphi = ab\cos 2\varphi.$$

Ces deux droites se coupent en un point de coordonnées

$$x = a(\cos\varphi + \sin\varphi)\cos 2\varphi,$$
$$y = b(\cos\varphi - \sin\varphi)\cos 2\varphi.$$

Pour évaluer la surface limitée pour cette courbe, utilisons la formule

$$S = \pm 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x\frac{dy}{d\varphi} - y\frac{dx}{d\varphi}\right) d\varphi,$$

d'où après quelques réductions

$$S = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2\varphi . d\varphi$$
$$= 2ab\int_0^{\pi} \cos^2 \varphi . d\varphi = ab\pi.$$

Question 1791.

(1898, p. 195.)

Dans un quadrangle quelconque ABCD, *soient :*

α *le cercle passant par les projections de* A *sur les côtés du triangle* BCD;

β *le cercle passant par les projections de* B *sur les côtés de* CDA;

γ *le cercle passant par les projections de* C *sur les côtés de* DAB;

δ *le cercle passant par les projections de* D *sur les côtés de* ABC.

Démontrer que les cercles α, β, γ, δ *passent par le même point, qui est le point commun aux cercles d'Euler des triangles* BCD, CDA, DAB, ABC. (G. Gallucci.)

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

Le théorème proposé est une conséquence directe des deux propositions bien connues :

1. Les projections orthogonales d'un point quelconque d'une hyperbole équilatère sur les côtés d'un triangle inscrit déterminent une circonférence qui passe par le centre de la courbe (voir *Nouvelles Annales*, 3e série, t. IV, p. 525).

2. Le lieu géométrique des centres des hyperboles équila-

tères circonscrites à un triangle donné est le cercle d'Euler de ce triangle.

Les huit circonférences proposées se coupent au centre de l'hyperbole équilatère circonscrite au quadrangle ABCD.

Question 1792.

(1898, p. 195.)

Démontrer la formule

$$(-1)^k C_{m-1}^k = 1 - C_m^1 + C_m^2 - C_m^3 + \ldots + (-1)^k C_m^k,$$

où C_m^k *désigne le nombre des combinaisons simples de* m *lettres* k *à* k. (A. CAZAMIAN.)

SOLUTION

Par M. A. DROZ-FARNY.

On a la relation bien connue

$$C_m^\lambda = C_{m-1}^{\lambda-1} + C_{m-1}^\lambda.$$

En faisant varier λ de 0 à k on a la suite d'égalités

$$\begin{aligned}
1 &= 1, \\
C_m^1 &= 1 + C_{m-1}^1, \\
C_m^2 &= C_{m-1}^1 + C_{m-1}^2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
C_m^{k-1} &= C_{m-1}^{k-2} - C_{m-1}^{k-1}, \\
C_m^k &= C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k.
\end{aligned}$$

Additionnons ces égalités après les avoir multipliées respectivement par $(-1)^0$, $(-1)^1$, $(-)^2$, ..., $(-1)^k$; on a

$$(-1)^k C_{m-1}^k = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k} (-1)^\lambda C_m^\lambda.$$