NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats d'études supérieures des facultés des sciences. Session de juillet 1899. Compositions. Besançon

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 225-237

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__225_1>

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1899. — COMPOSITIONS.

Besançon.

ANALYSE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — Question de cours. *Exposer la théorie du changement de variables dans les intégrales doubles.*

Étant donné un système de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz, *on considère le paraboloïde et le cylindre représentés par les équations*

$$x^2 + y^2 - 2az = 0,$$
$$x^2 + z^2 - 2az = 0,$$

où a est une constante positive; calculer le volume de la partie du cylindre intérieure au paraboloïde.

On a à effectuer l'intégrale double

$$2\int_0^{2a} dz \int_{-\sqrt{2az - z^2}}^{+\sqrt{2az - z^2}} \sqrt{2az - x^2}\, dx;$$

en la calculant d'après les méthodes classiques, on trouve $\frac{5}{2}\pi a^3$.

Épreuve pratique. — *Une surface de révolution engendrée par une cycloïde, tournant autour de sa base, est représentee par les deux équations*

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - \cos u, \qquad z = u - \sin u;$$

calculer les aires comprises entre les parallèles de la surface correspondant aux valeurs suivantes du paramètre u :

$$u = 0, \quad \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{2}.$$

On a à calculer l'intégrale $8\pi \int \sin^3 \frac{u}{2}\, du$, en prenant pour limites inférieures et supérieures

$$0, \quad \frac{\pi}{6}; \quad \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{4}; \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{2}.$$

Mécanique rationnelle.

Épreuve écrite. — *Un point pesant est attaché à l'extrémité d'un fil inextensible suspendu à un point* *fixe : trouver la courbe sur laquelle le fil doit s'enrouler, pour que, dans le mouvement de ce pendule, la tension reste constante. Trajectoire du point* M. *Loi du mouvement.*

En prenant pour axe des y une verticale dirigée vers le bas, désignant par α l'angle de la vitesse avec une horizontale, on a pour équations du mouvement

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{T}\sin\alpha, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - \mathrm{T}\cos\alpha,$$

T étant une constante. On déduit de ces équations l'équation des forces vives. De plus, en les combinant après les avoir multipliées respectivement par $-\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dx}{dt}$, et en désignant par v la vitesse, l'on a

$$mv\frac{dx}{dt} = mg\cos\alpha - \mathrm{T},$$

et, en combinant cette équation avec celle des forces vives, l'on a

$$y - y_0 = \frac{b}{(\mathrm{T} - mg\cos\alpha)^2}, \qquad dx = -\frac{2mgb\cos\alpha\, d\alpha}{(\mathrm{T} - mg\cos\alpha)^3};$$

les équations permettent de discuter la trajectoire qui est comprise entre deux horizontales fixes si $\mathrm{T} > mg$ et se compose alors d'une suite de boucles. Si $\mathrm{T} < mg$, la trajectoire se compose d'une boucle avec deux branches infinies et d'une courbe rappelant une hyperbole. La courbe sur laquelle le fil doit s'enrouler est la développée de celle-ci. L'arc de cette développée est égal, à une constante près, à $\frac{v}{\frac{d\alpha}{dt}}$; on déduit de là facilement les différentielles des coordonnées d'un de ses points par rapport à l'angle α, ce qui permet de la discuter. Quant à la nature du mouvement, l'équation des forces vives montre que la vitesse ne peut jamais s'annuler.

Nancy.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET CALCUL INTÉGRAL.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Intégrer* $y''' + y' = \operatorname{tg} x$.

2° *Équation différentielle des lignes de courbure.*

3° *Lignes de courbure de la surface engendrée par les tangentes à une hélice tracée sur un cylindre circulaire. Si un point décrit une ligne de courbure différente des génératrices rectilignes, l'un des centres de courbure principaux correspondants décrit une ligne géodésique du cylindre.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Aire d'une zone de paraboloïde de révolution comprise entre le sommet et un plan perpendiculaire à l'axe. Déterminer ce plan de façon que l'aire de la zone soit le double de l'aire latérale du cylindre de même base et de même hauteur, et résoudre numériquement l'équation trouvée.*

ASTRONOMIE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1re Question. *Détermination de la densité moyenne de la Terre et de la constante f du système solaire au moyen de la balance à doubles plateaux.*

Valeur numérique de f : 1° *dans le système* C.G.S ; 2° *en prenant pour unités la distance moyenne de la Terre au Soleil, la masse du Soleil et l'année tropique.*

2e Question. *On considère le lieu géométrique des points de la surface terrestre pour lesquels une étoile* E *se lève ou se couche au moment où elle passe au méridien supérieur à Nancy.*

1° *Equation de ce lieu en coordonnées rectangulaires.*

2° *En coordonnées géographiques (longitude l et latitude φ).*

3° *Distinguer sur le lieu les points qui correspondent au lever et au coucher de l'étoile* E.

On connaît le grand axe $2x$ et l'excentricité e du méridien elliptique de la terre; on connaît aussi la longitude l_0 de Nancy et la déclinaison D *de l'étoile* E. *Les longitudes seront supposées comptées, à partir du méridien de Paris, de* 0° *à* 360° *vers l'Est.*

Épreuve pratique. — *La durée de la révolution sidérale de la planète découverte par M. Witt, le* 13 *août* 1898, *est de* $642^j,08$; *l'excentricité de son orbite est* 0,21139.

Calculer le temps qui s'écoule depuis le passage de la planète à son périhélie jusqu'au moment où son rayon vecteur est perpendiculaire au grand axe.

Algèbre supérieure.

Épreuve écrite. — 1^{re} Question. *Démontrer que la fonction*

$$\varphi(u) = \frac{\sigma(u+v)}{\sigma u} e^{-u\zeta v},$$

où v est un argument constant, satisfait à chacune des équations différentielles

$$\left[\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}\right]^2 = pu + pv + p(u+v), \qquad \frac{\varphi''(u)}{\varphi(u)} = 2pu + pv.$$

2^e Question. 1° *Si les coordonnées d'un point variable d'une courbe sont définies par les égalités*

$$x = \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv}, \qquad y = pu - p(u+v),$$

où u désigne un paramètre variable et v une constante, montrer que l'équation de la courbe est de la forme

$$y^2 = x^4 + 6\alpha_2 x^2 + 4\alpha_3 x + \alpha_4,$$

et que, réciproquement, on peut choisir les invariantes g_2 *et* g_3 *de la fonction p et la valeur de la constante v de façon que les coefficients* α_2, α_3, α_4 *aient des valeurs données à l'avance.*

2° *En supposant que l'on effectue sur x une transformation rationnelle linéaire qui ramène le polynome du quatrième degré précédent à la forme*

$$(1 - x'^2)(1 - k^2 x'^2),$$

former l'équation qui donne les valeurs de k, et en déduire les valeurs de ce paramètre pour lesquelles les quatre racines du polynome forment une proportion harmonique.

Épreuve pratique. — *Réduction à la forme canonique de Legendre des deux intégrales*

$$\omega = \int_3^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x(x^2-9)}}, \qquad \omega_2 = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x(x^2+9)}}.$$

SESSION DE NOVEMBRE 1899. — COMPOSITIONS.

Besançon.

Analyse.

Épreuve écrite. — *Un angle droit* OMP, *dont le côté* MP *a une longueur constante a, se meut de telle sorte que son côté* OM *passe par un point fixe* O *et que le point* P *décrive une droite fixe* Ox *passant par* O. *Le point* M *décrit alors une courbe passant par* O.

Evaluer l'aire comprise entre cette courbe et une corde OM_1 *faisant l'angle* α *avec l'axe* Ox. *Calculer le volume engendré par cette aire tournant autour de* Ox.

L'aire demandée a pour valeur $\frac{a^2}{2}\left(\cot\alpha + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; le volume demandé a pour valeur $\frac{2\pi a^3(1-\sin\alpha)^2}{3\sin\alpha}$.

Épreuve pratique. — 1° *Sachant que l'on a*

$$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1,3}{2,4}\frac{x^5}{5} + \ldots,$$

calculer $\arcsin\frac{1}{2}$ *à un millième près.*

2° *On considère l'hypocycloïde à trois rebroussements engendré par un point d'un cercle de rayon* $\frac{1}{3}$ *qui roule intérieurement sur un cercle de rayon* 1. *Calculer la longueur totale de cette courbe à un centième près.*

Pour la première question, on calcule les quatre premiers termes de la série à un dix-millième près. On ajoute et on laisse de côté la quatrième décimale.

Pour la seconde question, la longueur de la courbe est $\frac{16}{3}$, soit 5,33 avec l'approximation demandée.

Caen.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Trouver l'intégrale générale de l'équation*

$$z\frac{d^2z}{dx\,dy} - 2\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy} = 0;$$

chercher, parmi les surfaces représentées en coordon-

nées rectangulaires par cette intégrale, celle qui contient à la fois

1° *La droite* $x = 1$, $z = y + 1$.

2° *Le cercle* $y = 0$, $x^2 + z^2 - 2x = 0$.

Équation de la surface $\frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} - \frac{y}{y+1}$.

II. *Déterminer les surfaces de révolution telles qu'en chacun de leurs points le rapport des rayons de courbure principaux aient une valeur donnée* α; *quelle doit être la forme de* α *pour que l'équation de la surface ne dépende que des fonctions circulaires ou logarithmiques? Étudier le cas de* $\alpha = -1$.

La question est classique : l'intégration n'amène que des fonctions élémentaires quand α est l'inverse d'un entier.

Pour $\alpha = -1$, la surface est une alysséide.

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation*

$$\frac{d^7 y}{dx^7} + 3\frac{d^6 y}{dx^6} + 5\frac{d^5 y}{dx^5} + 7\frac{d^4 y}{dx^4} + 7\frac{d^3 y}{dx^3} + \int \frac{d^2 y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + y = x^3 + e^{-x}.$$

$$y = (A + Bx + Cx^2)e^{-x} + (D + Ex)\cos x + (F + Gx)\sin x + x^3 - 6x^2 + 6x + \frac{x^3 e^{-x}}{24}.$$

Clermont.

Analyse.

Épreuve écrite. — *Trouver les courbes telles que la polaire d'un point* M *de la courbe par rapport à un cercle donné passe par le centre de courbure de la courbe au point* M; *en second lieu, telles que la polaire* *d'un point* M *par rapport à un cercle donné divise le rayon de courbure du point* M *dans un rapport donné.*

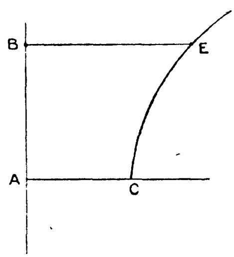
ÉPREUVE PRATIQUE. — *Caluler à $\frac{1}{10000}$ près la valeur de l'intégrale définie*

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,dx.$$

MÉCANIQUE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *L'extrémité* A *d'une barre rectiligne, homogène, pesante, glisse sans frottement sur un plan horizontal. Trouver le mouvement de cette barre. Calcul de la réaction en* A.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère l'aire plane homogène* ASEB *limitée par un arc* SE *de parabole, la partie* AS *de l'arc qui va du sommet à la directrice, une portion* AB *de la directrice et la parallèle* BE *à*



l'arc. Calculer les distances du centre de gravité de l'aire aux droites AS *et* AB, *ainsi que les moments d'inertie de cette aire par rapport aux droites* AS *et* AB *en supposant*

AS = 40, BE = 90, Densité de l'aire = 1.

Dijon.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — *Assigner les valeurs des constantes a, b, c pour lesquelles il existe quelque surface jouissant de la propriété que sa normale au point (x, y, z) passe toujours par le point (ay, bx, cz); former l'équation générale de ces surfaces dans l'hypothèse $c \neq 1$, et examiner le cas où l'on a $c = 1$.*

Mécanique.

Épreuve écrite. — *Deux tiges articulées* AB, AC *homogènes, pesantes, sont assujetties à rester dans un plan vertical sans frottement. Les extrémités libres* B *et* C *glissent sans frottement sur une horizontale.*

Épreuve pratique. — *Calculer la déviation produite par la force centrifuge composée due au mouvement de rotation de la Terre dans la chute d'un corps.*

Données :

Hauteur de chute	500^{m}
Accélération de la pesanteur	9,8088
Latitude	$48^{\circ}50'11''$
Durée du jour sidéral	86164 *secondes de temps moyen.*

Astronomie.

Épreuve écrite. — *Établir la fonction de s qui représente la probabilité pour qu'une erreur soit comprise entre 0 et s. Définition de l'erreur moyenne, de l'erreur probable.*

Épreuve pratique. — *Évaluer la probabilité pour* *qu'une erreur soit comprise entre* $\pm\alpha$, α *étant égal aux* $\frac{4}{10}$ *de l'erreur probable.*

On sait que l'erreur probable η *et la constante* h *sont liées par la relation* $h\eta = 0{,}4769363$.

Grenoble.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — *Une surface réglée* Σ *est engendrée par le mouvement d'une droite* G *qui se meut d'une façon déterminée en rencontrant constamment une courbe directrice* D, *et l'on demande quelle condition doit être remplie pour que la courbe* D *soit la ligne de striction de la surface* Σ. *On détermine la normale à la surface* Σ *en un point de la ligne* D.

Montrer que, dans le cas où la droite G *rencontre constamment la courbe* D *sous un angle constant, cette courbe est une ligne géodésique de la surface* Σ.

Application. — *Un cercle étant donné, trouver une surface réglée dont ce cercle soit la ligne de striction, les génératrices rencontrant cette courbe sous un angle constant.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale*

$$u = \int_0^\infty \frac{\sin mx}{x(x^2+a)^2}\,dx,$$

m *et* a *étant réels et positifs.*

Mécanique.

Épreuve écrite. — *Un point matériel non pesant* M, *mobile sans frottement sur un paraboloïde de révolution dont l'équation* $r = \frac{x^2+y^2}{2p}$, *est soumis à l'ac-*

tion d'une force parallèle à Or *et fonction connue de la distance* r *du point au plan tangent au sommet*

$$Z = mf(r) \qquad (m \text{ masse du point})$$

1° *Trouver le mouvement du point, la projection de sa trajectoire sur le plan* xy*, et la réaction de la surface;*

2° *Traiter complètement la question quand*

$$Z = -\frac{m\mu}{r^2}, \quad (\mu > 0);$$

3° *Déterminer la fonction* $f(r)$ *de telle sorte qu'on puisse disposer des données initiales de façon que la réaction soit constamment nulle.*

Épreuve pratique. — *Un tétraèdre homogène* OABC, *de densité* p*, est tel que le trièdre* O *est trirectangle et les trois arêtes* OA, OB, OC *sont égales à une même longueur* a*. On prend les trois droites* OA, OB, OC *pour axes* xyr *et l'on demande :*

1° *De former les sommes* Σmx^2, Σmy^2, Σmr^2, Σmyr, Σmrx, Σmxy, m *étant un élément de la masse du corps au point* xyr;

2° *Écrire l'équation de l'ellipsoïde d'inertie du corps relativement au point* O *par rapport aux axes* xyr;

3° *Rapporter cet ellipsoïde à un système d'axes principaux d'inertie et trouver les valeurs des moments principaux.*

Astronomie.

Épreuve écrite. — *Établir les formules des corrections de parallaxe :*

1° *Pour les coordonnées équatoriales;*

2° *Pour les coordonnées azimutales.*

Épreuve pratique. — *Étant donnés les trois côtés* a, b, c *dun triangle sphérique, calculer les angles* A, B, C *et les variations qu'éprouvent les angles* A, B, C *quand les côtés éprouvent des accroissements* δa, δb, δc.

Données numériques :

$$a = 113^\circ 2' 56'',64, \qquad b = 82^\circ 29' 28'',40, \qquad c = 74^\circ 54' 31'',06.$$