Nouvelles annales de mathématiques

G. de Longchamps

Sur la règle de Räabe ou règle de Duhamel

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 216-218

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__216_1>

[D2aα]

SUR LA RÈGLE DE RAABE OU RÈGLE DE DUHAMEL;

PAR M. G. DE LONGCHAMPS.

On peut donner de cette règle un énoncé qui nous paraît faciliter son application et, en même temps, la démonstration qui l'accompagne.

Voici l'énoncé que nous proposons :

Considérons la série (V),

$$(V) \equiv v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots,$$

et posons

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \beta}; \tag{1}$$

1° *Si l'on a* $\beta < 0$, *ou* $\beta = 0$, *la série* (V) *est divergente ;*

2° *Si* $n\beta$ *a une limite* k, *pour* $n = \infty$, *la série est convergente.*

Cette conclusion subsiste si $n\beta$ *croît sans limite; mais il y a doute, si* $k = 0$.

1° Si l'on suppose $\beta = 0$, quel que soit n, alors

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{v_3}{v_2} = \frac{2}{3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{n-1}{n};$$

par suite,

$$v_n = v_1 \frac{1}{n}.$$

La série (V), à un facteur constant près v_1, commun à tous ses termes, représente la série harmonique. La série est donc divergente.

Si l'on suppose $\beta < 0$, alors, on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} > \frac{n}{n+1},$$

ou

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} > \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}.$$

La série harmonique étant divergente, un théorème connu indique que (V) est aussi une série divergente.

2° Supposons, maintenant, $\beta > 0$. L'égalité (1) donne

$$(2) \qquad n v_n - (n+1) v_{n+1} = n \beta v_{n+1}.$$

Supposons que $n\beta$ ait une limite k, différente de zéro, pour $n = \infty$, ou que $n\beta$ croisse indéfiniment avec n. Alors, on peut trouver un nombre k', différent de zéro, tel que l'on ait constamment, quel que soit n,

$$n\beta > k'.$$

L'égalité (2) donne

$$n v_n - (n+1) v_{n+1} > k' v_{n+1};$$

et, successivement,

$$\begin{gathered} v_1 - 2 v_2 > k' v_2, \\ 2 v_2 - 3 v_3 > k' v_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ n v_n - (n+1) v_{n+1} > k' v_{n+1}, \end{gathered}$$

et, par conséquent,

$$(1 + k') v_1 - (n+1) v_{n+1} > k'(v_1 + v_2 + \ldots + v_{n+1}),$$

ou

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n < \frac{(1+k') v_1 - (n+k') v_{n+1}}{k'}.$$

Cette inégalité prouve que la somme S_n des n premiers termes de la série (V), quantité croissante, inférieure à un nombre fixe $\frac{(1+k')v_1}{k'}$, a une limite; la série est donc convergente.