

G. DE LONGCHAMPS

**Sur la règle de Rääbe ou règle de Duhamel**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 19  
(1900), p. 216-218

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1900\\_3\\_19\\_\\_216\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__216_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

[D2az]

**SUR LA RÈGLE DE RÄÄBE OU RÈGLE DE DUHAMEL;**

PAR M. G. DE LONGCHAMPS.

---

On peut donner de cette règle un énoncé qui nous paraît faciliter son application et, en même temps, la démonstration qui l'accompagne.

Voici l'énoncé que nous proposons :

Considérons la série (V),

$$(V) \equiv v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots,$$

et posons

$$(1) \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \beta};$$

1° Si l'on a  $\beta < 0$ , ou  $\beta = 0$ , la série (V) est divergente;

2° Si  $n\beta$  a une limite  $k$ , pour  $n = \infty$ , la série est convergente.

Cette conclusion subsiste si  $n\beta$  croît sans limite; mais il y a doute, si  $k = 0$ .

1° Si l'on suppose  $\beta = 0$ , quel que soit  $n$ , alors

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{v_3}{v_2} = \frac{2}{3},$$

.....

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{n-1}{n};$$

par suite,

$$v_n = v_1 \frac{1}{n}.$$

La série (V), à un facteur constant près  $v_1$ , commun à tous ses termes, représente la série harmonique. La série est donc divergente.

Si l'on suppose  $\beta < 0$ , alors, on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} > \frac{n}{n+1},$$

ou

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} > \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}.$$

La série harmonique étant divergente, un théorème connu indique que (V) est aussi une série divergente.

2° Supposons, maintenant,  $\beta > 0$ . L'égalité (1) donne

$$(2) \quad nv_n - (n+1)v_{n+1} = n\beta v_{n+1}.$$

Supposons que  $n\beta$  ait une limite  $k$ , différente de zéro, pour  $n = \infty$ , ou que  $n\beta$  croisse indéfiniment avec  $n$ . Alors, on peut trouver un nombre  $k'$ , différent de zéro, tel que l'on ait constamment, quel que soit  $n$ ,

$$n\beta > k'.$$

L'égalité (2) donne

$$nv_n - (n+1)v_{n+1} > k'v_{n+1};$$

et, successivement,

$$\begin{aligned} v_1 - 2v_2 &> k'v_2, \\ 2v_2 - 3v_3 &> k'v_3, \\ &\dots\dots\dots, \\ nv_n - (n+1)v_{n+1} &> k'v_{n+1}, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$(1+k')v_1 - (n+1)v_{n+1} > k'(v_1 + v_2 + \dots + v_{n+1}),$$

ou

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n < \frac{(1+k')v_1 - (n+k')v_{n+1}}{k'}.$$

Cette inégalité prouve que la somme  $S_n$  des  $n$  premiers termes de la série (V), quantité croissante, inférieure à un nombre fixe  $\frac{(1+k')v_1}{k'}$ , a une limite; la série est donc convergente.

