H. BILENKI

Note sur les permutants

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 213-216

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__213_1>

[B1a]

NOTE SUR LES PERMUTANTS;

PAR M. H. BILENKI.

Considérons un Tableau rectangulaire de q lignes et de p colonnes et représentons, suivant l'usage, par la notation a_α^β l'élément écrit dans la ligne de rang α et dans la colonne de rang β

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{p-1} & a_1^p \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^{p-1} & a_2^p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{q-1}^1 & a_{q-1}^2 & \ldots & a_{q-1}^{p-1} & a_{q-1}^p \\ a_q^1 & a_q^2 & \ldots & a_q^{p-1} & a_q^p \end{vmatrix}.$$

Développons ce Tableau conformément aux règles suivantes :

1° Chaque terme $a_{\alpha_1}^{\beta_1}$, $a_{\alpha_2}^{\beta_2}$, $\ldots$, $a_{\alpha_{p+q-1}}^{\beta_{p+q-1}}$ du développement contient $p+q-1$ éléments du Tableau, chaque élément n'entrant, bien entendu, qu'une fois dans chaque terme.

2° La somme $6_1+6_1+\ldots+6_{p+q-1}$ des indices supérieurs peut prendre les $p+q-1$ valeurs suivantes

$$q-1+\frac{p(p+1)}{2},$$

$$q-1+\frac{p(p+1)}{2}+1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$q-1+\frac{p(p+1)}{2}+p+q-2.$$

3° La somme $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{p+q-1}$ des indices inférieurs prend alors les $p+q-1$ valeurs correspondantes

$$p-1+\frac{q(q+1)}{2},$$

$$p-1+\frac{q(q+1)}{2}+1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$p-1+\frac{q(q+1)}{2}+p+q-2:$$

de sorte que l'excès de la première somme sur la seconde est constant et égal à

$$\frac{p(p-1)}{2}-\frac{q(q-1)}{2}.$$

Il est facile de s'assurer que ce développement, auquel je donnerai le nom de *permutant,* contient un nombre de termes égal à

$$\frac{p(p+1)\ldots(p+q-2)}{(q-1)!}.$$

Cela posé, considérons le permutant

$$\left|\begin{array}{ccccc} \frac{N+qr}{1} & \frac{1}{N+(q-1)r} & \cdots & \frac{1}{N+r} & \frac{1}{N} \\ \frac{1}{N-1+qr} & \frac{1}{N-1+(q-1)r} & \cdots & \frac{1}{N-1+r} & \frac{1}{N-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{p+1+qr} & \frac{1}{p+1+(q-1)r} & \cdots & \frac{1}{p+1+r} & \frac{1}{p+1} \\ \frac{1}{p+qr} & \frac{1}{p+(q-1)r} & \cdots & \frac{1}{p+r} & \frac{1}{p} \end{array}\right|$$

dans lequel p et r sont quelconques, mais où q est un entier positif; la différence $N-p$ est, en outre, entière et positive : c'est une fonction de r que je représenterai par le symbole $\overset{N}{\underset{p}{\Phi}}{}_q(r)$.

J'ai trouvé la formule suivante

$$\begin{aligned}(-1)^{N-p}\frac{1}{(N-p)!}\,\frac{1}{N+qr}\,\frac{1}{N+(q-1)r}\cdots\frac{1}{N+r}\,\frac{1}{N} \\ = \overset{N}{\underset{p}{\Phi}}{}_q(r)-\frac{1}{1}\overset{N-1}{\underset{p}{\Phi}}{}_q(r)+\frac{1}{2!}\overset{N-2}{\underset{p}{\Phi}}{}_q(r)+\cdots \\ +(-1)^{N-p}\frac{1}{(N-p)!}\overset{p}{\underset{p}{\Phi}}{}_q(r).\end{aligned}$$

On peut en déduire une foule d'autres en faisant certaines hypothèses sur les nombres p, q, r.

Dans le cas très particulier où le permutant considéré n'a que deux lignes, c'est-à-dire quand $N=p+1$, on obtient l'identité suivante, aisée, d'ailleurs, à démontrer directement :

$$\begin{aligned}&\frac{p+1+qr}{p+qr}\,\frac{p+1+(q-1)r}{p+(q-1)r}\cdots\frac{p+1+r}{p+r}\,\frac{p+1}{p} \\ &= \frac{1}{p+qr}+\frac{p+1+qr}{p+qr}\,\frac{1}{p+(q-1)r} \\ &\quad+\frac{p+1+qr}{p+qr}\,\frac{p+1+(q-1)r}{p+(q-1)r}\,\frac{1}{p+(q-2)r}+\cdots \\ &\quad+\frac{p+1+qr}{p+qr}\,\frac{p+1+(q-1)r}{p+(q-1)r}\cdots\frac{p+1+r}{p+r}\,\frac{1}{p}.\end{aligned}$$

Si $r = 0$, on a la formule suivante que j'ai déjà donnée (*Intermédiaire des Mathématiciens*, juin 1899, p. 127) :

$$(-1)^{N-p}\frac{N(N-1)(N-2)\ldots(p+1)p}{(N-p)!\,N^{n+1}}$$
$$=\sum_p^N{}^n - \frac{N}{1}\sum_p^{N-1}{}^n + \frac{N(N-1)}{2!}\sum_p^{N-2}{}^n - \ldots$$
$$+(-1)^{N-p}\frac{N(N-1)\ldots(p+1)}{(N-p)!}\sum_p^p{}^n,$$

et dans laquelle le symbole $\sum_p^N{}^n$ représente une fonction homogène complète, du degré n, dont tous les coefficients sont égaux à l'unité, de la suite des nombres

$$\frac{1}{p},\quad \frac{1}{p+1},\quad \ldots,\quad \frac{1}{N},$$

formule qui est elle-même assez générale et qui contient, entre autres, celle des progressions géométriques.

Enfin, si $r = 1$, on obtient plusieurs formules d'analyse combinatoire.

La fonction $\overset{N}{\underset{p}{\Phi}}{}_q(r)$ jouit encore de nombreuses propriétés; j'ignore si on les a étudiées.