NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. VACQUANT

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1899). Solution de la question de mathématiques spéciales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 130-142

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__130_0>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1899). SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR M. A. VACQUANT,
Ancien élève de l'École Polytechnique,
Professeur au Lycée de Nancy.

On considère tous les paraboloïdes ayant les mêmes focales qu'un paraboloïde P *dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, est*

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p} - 2x = 0.$$

On mène à ces paraboloïdes des normales parallèles à un plan Q *ayant pour équation*

$$ux + vy + wz = 0.$$

1° *Démontrer que la surface* S, *lieu des pieds de ces normales, peut être considérée comme engendrée par une parabole variable dont le plan enveloppe un cylindre parabolique* C.

2° *Démontrer que les coordonnées d'un point quelconque* M *de la surface* S *peuvent être exprimées rationnellement en fonction de deux paramètres* ρ, ρ_1 *qui fixent la position des plans tangents menés par le point* M *au cylindre* C.

Montrer, à l'aide des expressions ainsi trouvées, que le cylindre C *touche la surface* S *en tous les points d'une cubique.*

Montrer, à l'aide des mêmes expressions, que S *est une surface réglée du troisième ordre, dont les géné-*

ratrices rectilignes sont parallèles à celles d'un cône de révolution.

3° *La surface* S *admet une droite double* Δ *dont on demande les équations.*

4° *Démontrer que les génératrices rectilignes de la surface* S *rencontrent, en dehors de la droite double* Δ, *une autre droite* Δ_1 *avec laquelle elles font un angle constant. Trouver les équations de cette droite* Δ_1.

Remarque. — *Parmi les résultats énoncés, quelques-uns peuvent être établis facilement par la Géométrie; on saura gré aux candidats qui ajouteront ce mode de démonstration.*

La condition pour que le plan

$$ux + vy + wz + h = 0$$

soit tangent au paraboloïde P qui a pour équation, en coordonnées rectangulaires,

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p} - 2x = 0,$$

est

$$pv^2 - pw^2 - 2uh = 0.$$

Toutes les quadriques ayant les mêmes focales que P appartiennent au faisceau tangentiel

$$pv^2 - pw^2 - 2uh + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0,$$

c'est-à-dire sont inscrites dans la développable circonscrite au paraboloïde donné et au cercle de l'infini; toutes ces quadriques sont des paraboloïdes.

I. Soit P_λ un de ces paraboloïdes; prenons un point $M(x, y, z)$ sur P_λ tel que la normale en M soit parallèle à un plan Q ayant pour équation

$$ux + vy + wz = 0.$$

Le plan tangent en M, de coordonnées u_0, v_0, w_0, h_0, sera perpendiculaire au plan Q et l'on aura

$$uu_0 + vv_0 + ww_0 = 0$$

avec

$$\lambda u_0^2 + (\lambda + p)v_0^2 + (\lambda - p)w_0^2 - 2u_0h_0 = 0,$$

$$x = \frac{\lambda u_0 - h_0}{-u_0}, \qquad y = \frac{(\lambda + p)v_0}{-u_0}, \qquad z = \frac{(\lambda - p)w_0}{-u_0}.$$

Entre ces équations éliminons u_0, v_0, w_0, h_0; pour cela tirons les rapports $\frac{v_0}{u_0}$, $\frac{w_0}{u_0}$, $\frac{h_0}{u_0}$ des trois dernières et substituons dans les deux autres, ce qui donne

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \dfrac{y^2}{\lambda + p} + \dfrac{z^2}{\lambda - p} - 2x - \lambda = 0, & (1) \\[2ex] \dfrac{vy}{\lambda + p} + \dfrac{wz}{\lambda - p} - \quad u \quad = 0. & (2) \end{cases}$$

L'élimination de λ entre (1) et (2) donnerait l'équation de la surface S; il est préférable de considérer ces équations comme définissant les coordonnées x, y, z d'un point M de la surface S en *fonctions rationnelles* de deux paramètres z et λ, ce qui montre déjà que la surface S est unicursale; de plus ces équations (1) et (2) s'interprètent aisément : la première est l'équation ponctuelle des paraboloïdes P_λ homofocaux à P, la seconde est l'équation du plan diamétral de P_λ conjugué de la direction $\frac{X}{u} = \frac{Y}{v} = \frac{Z}{w}$ perpendiculaire au plan Q; ce résultat est facile à établir géométriquement, car au point $M(x, y, z)$ le plan tangent (u_0, v_0, w_0, h_0) à P_λ est perpendiculaire au plan Q, c'est-à-dire est parallèle à une perpendiculaire à Q; donc, sur P_λ, le lieu des points M est dans le plan diamétral conjugué de la direction perpendiculaire à Q; les équations (1) et (2) représentent donc une parabole dont le lieu est S.

L'équation du plan de cette parabole peut s'écrire

$$vy(\lambda-p)+wz(\lambda+p)-u(\lambda^2-p^2)=0$$

ou

$$(2') \qquad u\lambda^2-\lambda(vy+wz)+p(vy-wz-pu)=0.$$

L'enveloppe de ce plan est le cylindre parabolique C ayant pour équation ponctuelle

$$(\mathrm{C}) \qquad (vy+wz)^2-4pu(vy-wz-pu)=0.$$

II. Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de la surface S; l'équation $(2')$, du second degré en λ, a deux racines ρ et ρ_1 qui fixeront la position des deux plans tangents menés à (C) par le point $M(x, y, z)$. On a

$$\rho+\rho_1=\frac{vy+wz}{u},$$
$$\rho\rho_1=\frac{p(vy-wz-pu)}{u}.$$

D'ailleurs l'équation de S, $f(x, y, z)=0$, est la condition nécessaire et suffisante pour que les équations (1) et (2) en λ aient une racine commune, soit ρ. On aura

$$\frac{y^2}{\rho+p}+\frac{z^2}{\rho-p}-2x-\rho=0.$$

Des équations

$$vy+wz=u(\rho+\rho_1),$$
$$vy-wz=\frac{u}{p}\rho\rho_1+pu,$$

on déduit, par addition et soustraction,

$$2vy=u(\rho+\rho_1)+\frac{u}{p}\rho\rho_1+pu=\frac{u}{p}(\rho+p)(\rho_1-p),$$
$$2wz=u(\rho+\rho_1)-\frac{u}{p}\rho\rho_1-pu=-\frac{u}{p}(\rho-p)(\rho_1-p)$$

Ensuite

$$2x = \frac{y^2}{4p^2v^2}(\rho + p)(\rho_1 + p)^2 + \frac{z^2}{4p^2w^2}(\rho - p)(\rho_1 - p)^2 - \rho.$$

De sorte que les expressions demandées sont

$$(\mathrm{II})\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{u^2}{8p^2v^2}(\rho + p)(\rho_1 + p)^2 \\ &\quad + \frac{u^2}{8p^2w^2}(\rho - p)(\rho_1 - p)^2 - \frac{\rho}{2}, \\ y &= \frac{u}{2pv}(\rho + p)(\rho_1 + p), \\ z &= -\frac{u}{2pw}(\rho - p)(\rho_1 - p). \end{aligned}\right.$$

La relation entre ρ et ρ_1 définissant l'intersection de la surface S et du cylindre C s'obtient en remplaçant dans l'équation (C) y et z ou mieux $vy + wz$ et $vy + wz - pu$ par leurs valeurs en ρ et ρ_1. On obtient

$$u^2(\rho + \rho_1)^2 - 4pu\frac{u}{p}\rho\rho_1 = 0$$

ou

$$(\rho - \rho_1)^2 = 0,$$

d'où

$$\rho = \rho_1,$$

ce qui montre que les plans tangents à C issus d'un point M de l'intersection de C et S sont confondus, résultat évident *a priori*. En faisant dans (II) $\rho_1 = \rho$, on a les équations d'une cubique Γ. L'intersection de C et S est donc la cubique Γ comptée *deux fois*, et il en résulte que C et S se raccordent le long de cette cubique. On peut le voir autrement en déterminant le cylindre circonscrit à S parallèlement à Ox et montrant qu'il se raccorde avec S le long de la cubique Γ $(\rho_1 = \rho)$.

L'équation du plan tangent au point (ρ, ρ_1) à S est

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \rho} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \rho_1} & \dfrac{\partial y}{\partial \rho_1} & \dfrac{\partial z}{\partial \rho_1} \end{vmatrix} = 0.$$

Pour qu'il soit parallèle à Ox, il faut

$$\frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial z}{\partial \rho_1} - \frac{\partial y}{\partial \rho_1}\frac{\partial z}{\partial \rho} = 0$$

ou

$$-(\rho_1 + p)(\rho - p) + (\rho + p)(\rho_1 - p) = 0$$

ou

$$2p(\rho_1 - \rho) = 0.$$

D'où

$$\rho_1 = \rho,$$

équation qui définit la cubique Γ.

En faisant $\rho_1 =$ constante dans les équations (II), elles représentent une droite située sur la surface S; par suite, en faisant varier ρ_1, on voit que S est une surface réglée.

Les équations d'une génératrice rectiligne G_1 répondant à une valeur donnée de ρ_1 sont

$$(G_1)\quad \left\{ \begin{aligned} x &= \left[\frac{u^2}{8p^2v^2}(\rho_1 + p)^2 + \frac{u^2}{8p^2w^2}(\rho_1 - p)^2 - \frac{1}{2}\right]\rho \\ &\quad + \frac{u^2}{8pv^2}(\rho_1 + p)^2 - \frac{u^2}{8pw^2}(\rho_1 - p)^2, \\ y &= \frac{u}{2pv}(\rho_1 + p)\rho + \frac{u}{2v}(\rho_1 + p), \\ z &= -\frac{u}{2pw}(\rho_1 - p)\rho + \frac{u}{2w}(\rho_1 - p). \end{aligned} \right.$$

Ces équations sont de la forme

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \alpha\rho + a, \\ y &= \beta\rho + b, \\ z &= \gamma\rho + c, \end{aligned} \right.$$

et l'on voit, d'après les équations (G_1), les valeurs de a, β, γ, a, b, c en fonction de ρ_1.

La surface S est du troisième ordre, car son intersection avec un plan quelconque

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

est définie, sur la surface, par l'équation

$$(A\alpha + B\beta + C\gamma)\rho + (Aa + Bb + Cc + D) = 0.$$

Si l'on remplace dans les équations (G_1) ρ par sa valeur tirée de l'équation précédente, on obtient les équations d'une cubique unicursale, le paramètre étant ρ_1.

La parallèle à une génératrice G_1 menée par l'origine a pour équations

$$\frac{x}{\dfrac{u^2}{8p^2v^2}(\rho_1+p)^2 + \dfrac{u^2}{8p^2w^2}(\rho_1-p)^2 - \dfrac{1}{2}} = \frac{y}{\dfrac{u}{2pv}(\rho_1+p)} = \frac{z}{-\dfrac{u}{2pw}(\rho_1-p)} = \frac{1}{\dfrac{\mu}{2}}.$$

On trouve l'équation du cône engendré par cette parallèle en éliminant μ et ρ_1 entre les équations

$$\left\{\begin{aligned} \mu x &= \frac{u^2}{4p^2v^2}(\rho_1+p)^2 + \frac{u^2}{4p^2w^2}(\rho_1-p)^2 - 1, \\ \mu y &= \frac{u}{pv}(\rho_1+p). \\ \mu z &= -\frac{u}{pw}(\rho_1-p). \end{aligned}\right.$$

Les deux dernières équations sont du premier degré en ρ_1 et μ; en les résolvant on a

$$\frac{p}{u}\mu = \frac{\rho_1+p}{vy} = \frac{\rho_1-p}{-wz} = \frac{2\rho_1}{vy - wz} = \frac{2p}{vy + wz},$$

d'où

$$\mu = \frac{2u}{vy + wz}, \qquad \rho_1 + p = \frac{2pvy}{vy + wz}, \qquad \rho_1 - p = \frac{-2pwz}{vy + wz}.$$

Substituant dans la première équation, on a le cône

$$2ux(vy + wz) = u^2(y^2 + z^2) - (vy + wz)^2$$

ou

$$u^2(x^2 + y^2 + z^2) - (ux + vy + wz)^2 = 0,$$

de révolution, ayant pour axe une perpendiculaire au plan Q.

III. L'élimination de ρ et ρ_1 entre les équations (II) conduirait à l'équation $f(x, y, z) = 0$ de la surface S. Pour faire cette élimination on tirerait, par exemple, ρ de l'une des équations et l'on porterait la valeur trouvée dans les deux autres; d'où deux équations en ρ_1. En éliminant ρ_1 on trouverait $f(x, y, z) = 0$, équation qui exprime que les deux équations en ρ_1 ont en général une racine commune, ou encore par un point *quelconque* (x, y, z) de S passe une seule génératrice rectiligne; mais on a vu que toute section plane de S est une cubique unicursale, et par suite ayant un point double; donc la surface S a une ligne double qui est nécessairement une droite Δ; car, autrement, une section plane quelconque aurait au moins deux points doubles et se décomposerait. Il résulte de là que l'on pourra choisir le point (x, y, z), d'une infinité de manières, de façon que les deux équations en ρ_1 aient deux racines communes; on a ainsi un procédé de calcul assez simple pour trouver les équations de la droite double.

Entre les équations (II) éliminons donc ρ et ρ_1; pour cela, remarquons que la première de ces équations s'écrit, en tenant compte des deux autres,

$$x = \frac{uy}{4pv}(\rho_1 + p) - \frac{uz}{4pw}(\rho_1 - p) - \frac{\rho}{2},$$

d'où

$$\rho = \frac{uy}{2p}(\rho_1 + p) - \frac{uz}{2pw}(\rho_1 - p) - 2x.$$

Remplaçant ρ par cette valeur dans les deux dernières équations (II) on obtient

$$y = \frac{u}{2pv}(\rho_1 + p)\left[\frac{uy}{2pv}(\rho_1 + p) - \frac{uz}{2pw}(\rho_1 - p) - 2x + p\right],$$

$$z = \frac{-u}{2pw}(\rho_1 - p)\left[\frac{uy}{2pv}(\rho_1 + p) - \frac{uz}{2pw}(\rho_1 - p) - 2x - p\right].$$

Si l'on ordonne ces équations par rapport à ρ_1, après avoir multiplié les deux membres de la première par v et ceux de la seconde par w, on a

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{u^2}{4p^2}\rho_1^2\left(\frac{y}{v} - \frac{z}{w}\right) + \frac{\rho_1 u}{2p}\left(\frac{uy}{v} - 2x + p\right) \\ &\qquad + \frac{u^2}{4}\left(\frac{y}{v} + \frac{z}{w}\right) + \frac{u}{2}(-2x + p) - vy = 0. \\ &\frac{u^2}{4p^2}\rho_1^2\left(-\frac{y}{v} + \frac{z}{w}\right) + \frac{\rho_1 u}{2p}\left(-\frac{u}{w}z + 2x + p\right) \\ &\qquad + \frac{u^2}{4}\left(\frac{y}{v} + \frac{z}{w}\right) - \frac{u}{2}(2x + p) - wz = 0. \end{aligned}\right.$$

Pour obtenir la racine commune ρ_1 à ces deux équations, il suffit de les ajouter membre à membre, d'où

$$\frac{\rho_1 u}{2p}\left(\frac{u}{v} \quad - \frac{u}{w}z + 2p\right) + \frac{u^2}{2}\left(\frac{y}{v} + \frac{z}{w}\right) - 2ux - vy - wz = 0.$$

On a ainsi la valeur du paramètre ρ_1 qui fixe la position de la génératrice rectiligne G_1 passant par le point quelconque (x, y, z) de la surface S; mais les deux équations du second degré en ρ_1 auront *deux* racines communes si les coordonnées (x, y, z) satisfont aux équations

$$(\Delta) \qquad \left\{\begin{aligned} &u\left(\frac{y}{v} - \frac{z}{w}\right) + 2p = 0, \\ &\frac{u^2}{2}\left(\frac{y}{v} + \frac{z}{w}\right) - 2ux - vy - wz = 0, \end{aligned}\right.$$

obtenues en écrivant que les équations en ρ_1 ont leurs coefficients proportionnels. Pour ces valeurs de x, y, z la valeur de ρ_1 est indéterminée, comme cela devait être. On obtient ainsi les équations (Δ) d'une droite appartenant à S comme droite double.

On peut utiliser, d'une autre manière, les équations (II), pour démontrer l'existence de la droite double Δ et en trouver les équations. J'indiquerai seulement le calcul qui est moins simple que le précédent. On cherche la condition pour que deux génératrices rectilignes ρ_1 et ρ_2 de S se rencontrent, et ensuite le lieu de leur point de rencontre qui est la ligne double Δ. On trouve pour cette condition la relation involutive

$$\begin{aligned}(v^2+w^2)\rho_1\rho_2-p(\rho_1+\rho_2)(v^2-w^2)\\ +p^2(v^2+w^2)+\frac{4p^2v^2w^2}{u^2}=0,\end{aligned}$$

et, pour les coordonnées x, y, z du point de rencontre des génératrices ρ_1, ρ_2, on obtient des expressions linéaires en $\rho_1\rho_2$ et $\rho_1+\rho_2$. Pour retrouver les équations (Δ), il suffit d'éliminer $\rho_1\rho_2$ et $\rho_1+\rho_2$ entre les équations donnant x, y, z et la relation involutive.

Enfin, sans se servir des équations (II), on peut arriver très simplement aux équations de la droite double Δ en appliquant une propriété bien connue des quadriques homofocales (c'est M. Rœsch, Professeur au Collège de Montélimar, qui m'a fait penser à ce procédé):

Reprenons l'équation ponctuelle (1) des paraboloïdes homofocaux P_λ

$$\frac{y^2}{\lambda+p}+\frac{z^2}{\lambda-p}-2x-\lambda=0.$$

Par un point $M(x, y, z)$ passent trois paraboloïdes P_λ

se coupant, comme on sait, deux à deux à angle droit. Soient MN, MN′, MN″ les normales à ces paraboloïdes formant un trièdre trirectangle. Le point M sera un point double de la surface S si deux normales MN, MN′ sont parallèles au plan Q, et la troisième MN″ sera perpendiculaire au plan Q, c'est-à-dire on doit chercher sur P_λ le point M tel que la normale en ce point soit perpendiculaire au plan Q. En éliminant λ entre les équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{y^2}{\lambda+p}+\frac{z^2}{\lambda-p}-2x-\lambda=0,\\ &\frac{-1}{u}=\frac{\dfrac{y}{\lambda+p}}{v}=\frac{\dfrac{z}{\lambda-p}}{w},\end{aligned}\right.$$

on obtient le lieu du point double M. On écrit les deux dernières

$$\lambda+p=-\frac{u}{v}y,\qquad \lambda-p=-\frac{u}{w}z.$$

L'élimination de λ est immédiate et l'on a

$$\left\{\begin{aligned} &u\left(\frac{y}{v}-\frac{z}{w}\right)+2p=0,\\ &-\frac{vy+wz}{u}-2x+\frac{u}{2}\left(\frac{y}{v}+\frac{z}{w}\right)=0,\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire les équations (Δ).

IV. Dans les équations (G_1) prenons l'expression de x et cherchons une valeur constante K de ρ annulant le terme en ρ_1^2; d'où

$$\left(\frac{u^2}{8p^2v^2}+\frac{u^2}{8p^2w^2}\right)K+\frac{u^2}{8pv^2}-\frac{u^2}{8pw^2}=0,$$

$$K=\frac{p(v^2-w^2)}{v^2+w^2}.$$

Le point correspondant à $\rho=K$ sur chaque génératrice ρ_1 décrit, quand ρ_1 varie, une droite, car les expressions de y et z sont linéaires en ρ_1 et cette droite est rencontrée par toutes les génératrices G_1. Les coordonnées x, y, z d'un point de cette droite sont

$$x = \left[2p\rho_1\left(\frac{u^2}{8p^2v^2} - \frac{u^2}{8p^2w^2}\right) - \frac{1}{2}\right]K + 2p\rho_1\left(\frac{u^2}{8pv^2} + \frac{u^2}{8pw^2}\right),$$

en tenant compte de la définition de K; ordonnant le second membre par rapport à ρ_1, on a

$$x = \frac{\rho_1 u^2}{4}\left(\frac{w^2-v^2}{v^2w^2}\,\frac{v^2-w^2}{v^2+w^2} + \frac{v^2+w^2}{v^2w^2}\right) - \frac{K}{2},$$

$$x = \frac{\rho_1 u^2}{v^2+w^2} - \frac{p(v^2-w^2)}{2(v^2-w^2)}.$$

Ensuite les deux dernières équations (II) donnent

$$\begin{aligned} y &= \frac{u}{2pv}(\rho_1+p)(K+p) \\ &= \frac{u}{2pv}(\rho_1+p)\frac{2pv^2}{v^2+w^2} = \frac{uv}{v^2+w^2}(\rho_1+p), \\ z &= -\frac{u}{2pw}(\rho_1-p)(K-p) = \frac{uw}{v^2+w^2}(\rho_1-p). \end{aligned}$$

On a ainsi les équations d'une droite Δ_1 rencontrée par toutes les génératrices G_1, savoir

$$(\Delta_1)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{x+\frac{p}{2}\left(\frac{v^2-w^2}{v^2+w^2}\right)}{u} &= \frac{y-\frac{puv}{v^2+w^2}}{v} \\ &= \frac{z+\frac{puw}{v^2+w^2}}{w} = \frac{u}{v^2+w^2}\rho_1. \end{aligned} \right.$$

Deux génératrices G_1, G_2 rencontrent, d'après les équations précédentes, la droite Δ_1 en des points distincts, et par suite Δ_1 est une droite simple de S. Le plan (Δ_1, G_1) coupe la surface S suivant une troisième droite G_2 rencontrant G_1 sur la droite double Δ, d'après ce qui précède (III).

Les équations de Δ_1 montrent que cette droite est parallèle à l'axe du cône de révolution trouvé plus haut; il en résulte que les génératrices rectilignes de S coupent Δ_1 sous un angle constant égal au demi-angle d'ouverture de ce cône.

Remarque. — Quelques considérations géométriques simples permettent de répondre partiellement aux questions III et IV. On a déjà montré, comme conséquence de la représentation paramétrique de la surface S, que celle-ci admet une droite double Δ.

Une génératrice quelconque G_1 de la surface rencontre Δ, car si cela n'était pas, deux génératrices rectilignes G_1, G_2 et la droite double Δ définiraient un hyperboloïde H; les génératrices de H, de système différent de G_1, rencontreraient S en quatre points dont deux confondus sur Δ, et alors H ferait partie de S, ce qui n'est pas.

Maintenant soient G_1, G_2, G_3, G_4 quatre génératrices quelconques de S; on peut mener deux droites les rencontrant : l'une est Δ, d'après ce qui précède; soit Δ_1 l'autre; cette dernière rencontrera aussi une génératrice quelconque G de S, car par un point M pris arbitrairement sur S passe une droite s'appuyant sur Δ et Δ_1, ayant, par conséquent, quatre points sur S; c'est donc la génératrice G de S qui passe en M. Ceci suppose que, par M, il ne passe qu'une génératrice rectiligne G; cette propriété résulte immédiatement, comme on l'a vu, des équations (II) et peut aussi s'établir par la Géométrie; c'est d'ailleurs une propriété qui appartient à toute surface réglée du troisième ordre dont l'étude géométrique et analytique figure dans un certain nombre d'Ouvrages; pour cette raison, je pense qu'il est inutile de rappeler ici la démonstration géométrique de cette propriété.