NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JOSEPH SER

Note pour servir à l'étude des faisceaux de coniques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 126-129

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__126_1>

[$L^1$18b]

NOTE POUR SERVIR A L'ÉTUDE DES FAISCEAUX DE CONIQUES;

Par M. Joseph SER, à Nantes.

La théorie des polaires réciproques fait correspondre les propriétés des coniques passant par quatre points et celles des coniques tangentes à quatre droites. Le théorème suivant permet en outre de rattacher ces propriétés à celles de la conique directrice.

Soient trois droites AB, BC, CA, un point P et une quatrième droite Δ.

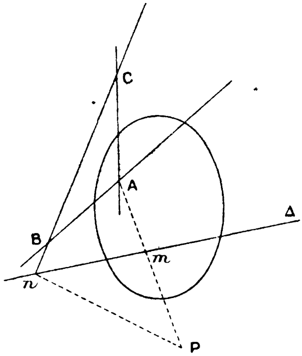
Nous allons considérer les trois involutions déterminées sur la droite Δ respectivement par l'intersection de cette droite :

1° Avec les coniques (nous les appellerons les *coniques* S) passant par les quatre points A, B, C, P;

2° Avec les tangentes issues du point P aux coniques T qui touchent les quatre droites AB, BC, CA et Δ;

3° Avec les droites passant par le point P et conjuguées par rapport à une conique (nous l'appellerons la *conique* D) déterminée sans ambiguïté de la manière suivante : elle admet le triangle ABC comme triangle conjugué, et la polaire du point P par rapport à cette conique est la droite Δ.

Fig. 1.



Nous disons que les trois involutions ainsi définies coïncident.

Considérons un couple de points tel que celui que nous obtenons par l'intersection de la droite Δ avec le système des droites PA, BC. Soient m et n ces deux points; ce couple est commun aux trois involutions.

Il appartient évidemment à la première pour le cas où l'on considère parmi les coniques S celle qui est formée des deux droites PA, BC.

Il appartient aussi à la seconde. En effet, parmi les coniques tangentes aux quatre droites AB, BC, CA et Δ, on peut considérer celle qui est réduite aux deux points A et n et les tangentes issues du point P à cette conique sont les droites PmA et Pn.

Enfin, le couple appartient aussi à la troisième involution, car les droites PmA et Pn sont conjuguées par rapport à la conique D. En effet, le point n est l'intersection de la droite Δ, polaire du point P, et de la droite BC, polaire du point A. C'est donc le pôle de la droite PmA.

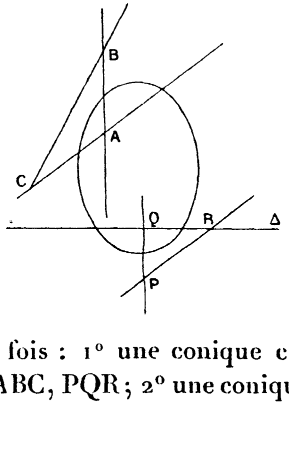
Comme il existe évidemment trois couples de points tels que le couple mn, ces couples étant communs aux trois involutions, celles-ci coïncident.

Remarquons que les coniques S peuvent être regardées comme les polaires réciproques des coniques T par rapport à la conique directrice D.

Applications. — On voit que ce théorème permet de relier dans chacun des groupes de coniques S, T et D les propriétés qui y dépendent respectivement de l'involution considérée. Par sa généralité et sa symétrie, il est susceptible d'un certain nombre d'applications; nous nous contenterons d'en déduire quelques théorèmes connus.

I. Soient Q et R deux points de la droite Δ. S'ils appartiennent à l'une des trois involutions considérées, ils appartiendront simultanément aux deux autres, et alors

Fig. 2.



il existera à la fois : 1° une conique circonscrite aux deux triangles ABC, PQR; 2° une conique inscrite dans ces deux triangles; 3° une conique conjuguée de ces deux triangles. D'où nous pouvons conclure immédiatement cette proposition :

Si deux triangles ABC, PQR *sont placés de telle sorte qu'une des trois coniques circonscrite aux deux triangles, ou inscrite dans les deux triangles, ou conjuguée des deux triangles, existe, les deux autres existeront simultanément.*

II. Il est naturel d'étudier le cas où l'involution a une forme particulière. Nous le ferons dans le cas spécial où la droite Δ est à l'infini. Alors nous considérerons, au lieu des points en involution sur la droite Δ, le faisceau involutif des droites joignant ces points au point P. Les directions asymptotiques des coniques S sont alors les couples de droites de ce faisceau. Les coniques T sont des paraboles. La conique D a pour centre le point P.

Supposons que, parmi les droites du faisceau involutif joignant le point P aux points en involution sur Δ se trouvent les droites isotropes. Alors le point P est sur le cercle circonscrit au triangle ABC puisque, parmi les coniques passant par les quatre points A, B, C, P, s'en trouve une qui admet comme directions asymptotiques les droites isotropes, et, par conséquent, est un cercle. D'autre part, le point P est foyer d'une des paraboles T. Enfin la conique D est une hyperbole équilatère, puisqu'elle admet comme diamètres conjugués les droites isotropes.

Nous en concluons ces deux théorèmes connus :

Le cercle circonscrit à un triangle ABC est le lieu :

1° Des foyers des paraboles inscrites dans ce triangle;

2° Des centres des hyperboles équilatères conjuguées de ce triangle.