NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEMINIANO PIRONDINI

Symétrie orthogonale par rapport à un cylindre quelconque

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 107-126

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__107_1>

[O4a]

SYMÉTRIE ORTHOGONALE PAR RAPPORT A UN CYLINDRE QUELCONQUE;

PAR M. GEMINIANO PIRONDINI, à Parme.

§ I.

Deux points A, A_1 sont *symétriques* par rapport à un cylindre K (*cylindre ichnographique*) quand la droite AA_1 est normale à la surface de K et qu'en outre elle est partagée en deux parties égales par cette surface.

Deux figures F, F_1 sont *symétriques*, quand une d'elles est le lieu des symétriques des points de l'autre.

A une figure F peuvent correspondre une ou plusieurs figures réelles ou imaginaires F_1. Cela tient à ce qu'un point A a autant de symétriques A_1 que le cylindre K a de normales passant par A.

Si la figure donnée est une ligne L, le lieu des pieds des normales au cylindre K, menées des points de L, est une autre ligne Λ qu'on appelle la *projection orthogonale de* L *sur le cylindre*.

Problème. — *On donne le cylindre ichnographique* K *et la figure primitive* F; *déterminer la figure symétrique* F_1.

Si $A(x, y, z)$, $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_0(\xi, \eta, \zeta)$ sont trois points correspondants de F, F_1, K, la condition que la droite AA_1 soit normale à K est exprimée par les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} (x = \xi)\xi' + (y - \eta)\eta' = 0, \\ z = \zeta. \end{cases}$$

D'ailleurs, puisque

$$(2)\qquad \xi = \frac{x + x_1}{2}, \qquad \eta = \frac{y + y_1}{2}, \qquad \zeta = z = z_1,$$

on a

$$(3)\qquad x_1 = 2\xi - x, \qquad y_1 = 2\eta - y, \qquad z_1 = \zeta = z.$$

Puisqu'on peut regarder ξ, η comme des fonctions d'un paramètre τ, et x, y, z comme des fonctions d'un paramètre t, ou de deux paramètres indépendants u, v, suivant que la figure F est une ligne ou une surface, on voit que la figure symétrique F_1 est, dans tous les cas, définie par les équations (3), pourvu qu'on y élimine un des deux paramètres t, τ, ou bien un des trois paramètres u, v, τ au moyen de la première équation (1).

La projection orthogonale d'une ligne L sur le cylindre K est représentée par les équations qu'on dérive des relations (2), en y éliminant l'un des paramètres t, τ, comme on vient de dire.

La figure F *est une ligne* L. — Soient

$$\eta = \varphi(\xi), \qquad y = f(x)$$

les équations cartésiennes de la section droite du cylindre K et de la projection de la ligne objective L sur le plan $z = 0$.

En ayant recours aux égalités (3), (1), on trouve que la ligne symétrique L_1 est définie par les équations

$$x_1 = 2\xi - x, \qquad y_1 = \varphi(\xi) + \frac{x - \xi}{\varphi'(\xi)}, \qquad z_1 = z,$$

quand on emploie la relation

$$x + f(x)\varphi'(\xi) = \xi + \varphi(\xi)\varphi'(\xi),$$

pour y éliminer x ou ξ.

On peut effectuer l'élimination quand L est sur un plan parallèle à l'axe des z.

En supposant, en effet, $x = k$ (ce qu'on peut faire sans nuire à la généralité), la ligne symétrique L_1 est placée sur le cylindre dont la section droite est la courbe

$$y_1 = \varphi\left(\frac{x_1 + k}{2}\right) + \frac{k - x_1}{2\varphi'\left(\frac{x_1 + k}{2}\right)}.$$

Remarque. — Les calculs précédents restent les mêmes si, au lieu d'une ligne gauche L, on a un cylindre C dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z. La figure symétrique est, dans ce cas, un autre cylindre C_1 ayant même direction que C.

La figure F *est une surface* S. — Soit

$$z = F(x, y)$$

l'équation cartésienne de S.

Comme l'équation (1) donne dans ce cas

$$y = \varphi(\xi) - \frac{x-\xi}{\varphi'(\xi)},$$

en se rappelant les égalités (3), on trouve que *la surface symétrique* S_1 *est représentée par les équations*

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & x_1 = 2\xi - x, \qquad y_1 = \varphi(\xi) + \frac{x-\xi}{\varphi'(\xi)}, \\ & \qquad z_1 = F\left[x, \varphi(\xi) - \frac{x-\xi}{\varphi'(\xi)}\right], \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles x *et* ξ *doivent être regardés comme deux paramètres indépendants.*

Remarque. — Ce théorème n'est pas applicable quand S est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z. Mais dans ce cas on peut mettre à profit la remarque précédente.

§ II.

Exemples. — 1. La figure objective est une droite. Puisqu'on peut prendre

$$x = 0, \qquad y = t \sin\theta, \qquad z = t\cos\theta$$

(θ étant une constante) sans nuire à la généralité, la première condition (1) donne

$$t = \frac{\xi\xi' + \eta\eta'}{\eta' \sin\theta}.$$

La droite donnée L a donc pour symétrique L_1 la courbe

$$(5) \quad x_1 = 2\xi, \qquad y_1 = \frac{\eta\eta' - \xi\xi'}{\eta'}, \qquad z_1 = \frac{\xi\xi' + \eta\eta'}{\eta'} \cot\theta,$$

et pour projection orthogonale sur le cylindre K la ligne Λ, qu'on obtient en portant sur les génératrices de celui-ci des hauteurs $\zeta (= z_1)$ données par la troisième égalité (5).

En supposant

$$\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 = k$$

(α, β, γ, k étant des constantes), les équations (5) donnent

$$2\alpha\xi\eta' + \beta(\eta\eta' - \xi\xi') + \gamma \cot\theta (\xi\xi' + \eta\eta') = k\eta'.$$

Cette équation, bien qu'elle ne soit pas intégrable dans le cas général, démontre que, sous certaines conditions, une droite peut avoir une symétrique plane.

Si $\alpha = 0$, on a, l'intégration étant effectuée,

$$(\gamma \cot\theta - \beta)\xi^2 + (\gamma \cot\theta + \beta)\eta^2 - 2k\eta = h \qquad (h = \text{const.}).$$

Donc, *si la ligne symétrique d'une droite est sur un plan perpendiculaire au plan déterminé par la droite donnée et la direction des génératrices du cylindre ichnographique, la section droite de celui-ci est une conique à centre.*

En supposant

$$\zeta = z_1 = a\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

($a =$ const.), la troisième équation (5) donne par intégration

$$\xi^2 + \eta^2 = (a \operatorname{tang}\theta . \eta + b)^2.$$

Par conséquent, *si la projection orthogonale* Λ *d'une droite* L *sur un cylindre* K *s'obtient en portant sur les génératrices des distances proportionnelles aux rayons vecteurs* R *de la section droite de* K, *cette section droite est une conique à centre. L'origine des rayons vecteurs* R *est au centre de cette conique.*

Quand on donne arbitrairement le cylindre K, *on peut tracer sur sa surface une ligne* Λ *sous des con-*

ditions telles qu'elle soit la projection orthogonale d'une certaine droite.

En effet, supposons que l'on ait

$$(6)\qquad \xi = \varphi(\sigma) \qquad \eta = \int \sqrt{1 - \varphi'^2(\sigma)}\, d\sigma,$$

σ étant l'arc de la section droite Λ_0 de K.

En remarquant que le rayon de courbure de Λ_0 est donné par l'égalité

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varphi''(\sigma)}{\sqrt{1 - \varphi'^2(\sigma)}},$$

on déduit de là

$$\varphi(\sigma) = \int \sin\left(k + \int \frac{d\sigma}{\rho}\right) d\sigma + h,$$

k et h étant deux constantes arbitraires.

De plus, la troisième égalité (5) donne

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \zeta &= \left[\int \sqrt{1 - \varphi'^2(\sigma)}\, d\sigma + \frac{\varphi(\sigma)\varphi'(\sigma)}{\sqrt{1 - \varphi'^2(\sigma)}}\right] \cot\theta \\ &= \left\{\int \cos\left(k + \int \frac{d\sigma}{\rho}\right) d\sigma + \operatorname{tang}\left(k + \int \frac{d\sigma}{\rho}\right) \right. \\ &\qquad \left. \times \left[\int \sin\left(k + \int \frac{d\sigma}{\rho}\right) d\sigma + h\right]\right\} \cot\theta. \end{aligned}\right.$$

Pour construire la ligne Λ dont on vient de parler, il suffit donc de plier, sur le cylindre K, le plan de la ligne L_0 représentée par la première ou par la deuxième équation (7), suivant que la section droite Λ_0 du cylindre K est définie par les équations (6) ou par l'équation intrinsèque $\rho = \rho(\sigma)$.

Si, par exemple, la section droite de K est une chaînette ou un cercle, on a respectivement

$$\varphi(\sigma) = \sqrt{a^2 + \sigma^2}, \qquad \rho = a.$$

La détermination de Λ se fait donc par la construction indiquée, en opérant sur les lignes planes L_0 représentées respectivement par les équations cartésiennes :

$$\zeta = \left(a \log \frac{\sqrt{a^2+\sigma^2}+\sigma}{a} + \frac{\sigma\sqrt{a^2+\sigma^2}}{a}\right)\cot\theta,$$

$$\zeta = h \cot\theta . \operatorname{tang}\left(k + \frac{\sigma}{a}\right).$$

2. Si la section droite du cylindre K est la parabole

$$\eta = \varphi(\xi) = \frac{\xi^2}{a},$$

et si la surface objective S est le plan

$$z = \mathrm{F}(x, y) = mx,$$

passant par l'axe de la parabole précitée, l'élimination des deux paramètres x, ξ entre les égalités (4) conduit à l'équation

$$4am^2y_1(mx_1+z_1) = (mx_1+z_1)^3 - 2a^2m^2(mx_1-z_1).$$

Celle-ci démontre que *le plan donné a pour symétrique une surface algébrique du troisième ordre.*

§ III.

Quand on donne le cylindre ichnographique K et la ligne Λ, projection orthogonale d'une ligne inconnue L, on peut déterminer cette ligne et sa symétrique L_1 d'une infinité de manières, car la seule condition à vérifier, c'est que les lignes L, L_1 soient sur la surface réglée Σ lieu des normales au cylindre K le long de Λ. Si l'on a recours à la première condition (1), et si l'on remarque, de plus, que pour chaque point de Σ on a $z = \zeta$, on peut énoncer ce théorème :

La surface réglée Σ à plan directeur, ayant la ligne $\xi = \lambda(\zeta)$, $\eta = \mu(\zeta)$ pour trajectoire orthogonale *de ses génératrices, est représentée par l'équation*

$$[x - \lambda(z)]\lambda'(z) + [y - \mu(z)]\mu'(z) = 0.$$

On voit par là que, si la ligne A est de l'ordre n, la surface réglée Σ est de l'ordre $2n - 1$.

§ IV.

PROBLÈME. — *On demande de déterminer d'abord les conditions sous lesquelles on doit prendre deux figures* F, F_1 *pour que celles-ci puissent être considérées comme deux figures symétriques par rapport à un cylindre, et ensuite de trouver un tel cylindre.*

PREMIER CAS. — *Les figures données sont deux lignes* L, L_1.

Ces lignes L, L_1 ne peuvent pas être tracées d'une façon absolument arbitraire.

En effet, si l'on suppose que les génératrices du cylindre ichnographique soient parallèles à l'axe des z, menons une suite de droites parallèles au plan $z = 0$ et s'appuyant aux deux courbes L, L_1; la correspondance entre les points de celles-ci est alors fixée complètement. Conséquemment on ne peut pas assujettir les droites AA_1, joignant les couples de points correspondants des lignes L, L_1, à la condition d'être normales au cylindre K (passant par les milieux des segments AA_1 et ayant les génératrices parallèles à l'axe des z.

On peut cependant démontrer qu'*on peut prendre arbitrairement une des lignes* L, L_1 *et le cylindre sur lequel l'autre doit être placée.*

Si, en effet, L_0, L_{10} sont les projections des lignes L, L_1 sur le plan $z = 0$, supposons qu'on prenne L et L_{10} d'une façon arbitraire.

Le problème proposé est résolu dès qu'on a déterminé la loi de correspondance entre les points A_0, A_{10} des lignes L_0, L_{10}. Car il suffit alors de mener des parallèles aux droites A_0, A_{10} par les points de L. Ces parallèles vont couper le cylindre, dont L_0 est la section droite, suivant la ligne L_1 symétrique de L.

On voit donc que la seule condition qu'on doit exprimer est que la ligne Λ_0, lieu des milieux des segments A_0, A_{10}, est une trajectoire orthogonale de ces droites. Or, les cosinus directeurs des segments $A_0 A_{10}$ et ceux de la tangente à Λ_0 sont proportionnels respectivement aux différences

$$x - x_1. \qquad y - y_1,$$

et aux quantités

$$d(x + x_1), \qquad d(y + y_1).$$

La condition à vérifier est donc la suivante

$$(x - x_1)(dx + dx_1) + (y - y_1)(dy + dy_1) = 0. \tag{8}$$

Et comme celle-ci est réductible à une relation différentielle entre les paramètres t, t_1, en fonction desquels on peut supposer que soient exprimés (x, y) et (x_1, y_1) respectivement, la détermination de la loi de correspondance dont on vient de parler est ramenée à l'intégration de l'équation (8).

Remarque. — Si l'on exprime les variables x, y, x_1, y_1 en fonction de ξ et η, en ayant recours aux égalités (2) et aux équations

$$y = F(x), \qquad y_1 = F_1(x_1),$$

des lignes données L_0, L_{10}, l'équation (8) se réduit à une relation différentielle entre ξ, η.

L'intégration de celle-ci définit la ligne Λ_0 et conséquemment le cylindre K. A ce point, le problème doit être regardé comme résolu.

§ V.

Exemple. — *La ligne donnée* L *et la ligne* L_1 *sont sur deux plans* Π, Π_1 *parallèles à l'axe des* z.

Si l'on suppose que Π soit le plan coordonné $y=0$ et que Π_1 passe par l'axe des z et soit incliné de l'angle θ sur Π, on a

$$x=t, \qquad y=0, \qquad x_1=t_1\cot\theta, \qquad y_1=t_1.$$

La première méthode conduit à l'équation différentielle

$$(9) \quad \sin\theta(t\sin\theta-t_1\cos\theta)\,dt+(t\sin\theta\cos\theta-t_1)\,dt_1=0,$$

qu'on ne sait pas intégrer dans le cas général.

Quant à la deuxième méthode, si l'on remarque que

$$y_1=2\eta, \qquad x_1=2\eta\cot\theta, \qquad x=2\xi-x_1=2\xi-2\eta\cot\theta,$$

on arrive à l'équation différentielle

$$\xi\,d\xi-\eta\,d\eta-2\cot\theta.\eta\,d\xi=0,$$

d'où, en intégrant,

$$\begin{aligned}(\xi^2-2\xi\eta.\cot\theta-\eta^2)&[\sin\theta.\xi+(1-\cos\theta)\eta]^{\cos\theta}\\ &=c[\sin\theta.\xi-(1+\cos\theta)\eta]^{\cos\theta},\end{aligned}$$

c étant une constante arbitraire.

En décomposant le trinôme

$$\xi^2-2\xi\eta.\cot\theta-\eta^2,$$

en facteurs linéaires, on peut donner à l'équation ci-dessus la forme

$$(10) \quad [\xi\sin\theta+(1-\cos\theta)\eta]^{1+\cos\theta}[\xi\sin\theta-(1+\cos\theta)\eta]^{1-\cos\theta}=c.$$

Celle-ci définit la section droite du cylindre K; l'indétermination de c nous apprend que le problème proposé est résoluble d'une infinité de manières.

Remarque. — La surface symétrique du plan Π par rapport au cylindre K qu'on vient de déterminer est l'autre plan Π_1.

Cas particulier. — Quand $\theta = \frac{\pi}{2}$, l'équation (9) se réduit à cette autre :

$$t_1\,dt_1 = t\,dt;$$

d'où, par intégration,

$$t_1 = \sqrt{t^2 - 4c},$$

c étant une constante arbitraire.

Il en résulte alors

$$\xi = \frac{x + x_1}{2} = \frac{t}{2}, \qquad \eta = \frac{y + y_1}{2} = \frac{\sqrt{t^2 - 4c}}{2}$$

et

$$\xi^2 - \eta^2 = c. \tag{11}$$

Cette équation peut aussi se déduire de l'égalité (10), en y supposant $\theta = \frac{\pi}{2}$.

L'analyse précédente démontre que :

Si la ligne L *du plan* $y = 0$, *représentée par l'équation* $z = f(x)$, *a pour symétrique une ligne* L_1 *du plan* $x = 0$:

1° *Le cylindre ichnographique* K *a pour section droite une hyperbole équilatère quelconque* (11), *dont les asymptotes sont les axes coordonnés.*

2° *La ligne* L_1 *est représentée par l'équation*

$$z_1 = f\left(\sqrt{y_1^2 + 4c}\right).$$

Si, par exemple, on suppose successivement

$$z = f(x) = \left(\alpha x + \beta,\ \sqrt{\alpha x^2 + \beta},\ \frac{x^2}{a},\ \sqrt{ax},\ \dots\right),$$

on a respectivement

$$(z_1 - \beta)^2 - \alpha^2 y_1^2 = 4\alpha^2 c, \qquad z_1^2 - \alpha y_1^2 = 4\alpha c + \beta,$$
$$z_1 - \frac{4c}{a} = \frac{y_1^2}{a}, \qquad z_1^4 = a^2(y_1^2 + 4c), \qquad \dots.$$

Donc : *Quand* L *est une droite, ou une conique à centre, ou une parabole dont l'axe coïncide avec l'axe des z, ou une parabole dont l'axe coïncide avec l'axe des x, la ligne symétrique* L_1 *est respectivement une conique à centre, une conique à centre, une parabole dont l'axe coïncide avec l'axe des z, une ligne du quatrième ordre.*

§ VI.

Second cas. — *Les figures données sont deux surfaces* S, S_1.

Quelles que soient ces surfaces, on peut les représenter par les équations

$$\begin{cases} x = f(u, v), \\ y = \varphi(u, v), \\ z = \psi(v), \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1 = F(t, v), \\ y_1 = \Phi(t, v), \\ z_1 = \Psi(v), \end{cases}$$

u et v étant deux paramètres indépendants et t un troisième paramètre qu'on doit regarder comme une fonction (inconnue) de u et v.

Puisque la condition $z_1 = z$ est remplie quelle que soit la valeur des paramètres u et v, il ne nous reste qu'à vérifier les deux conditions suivantes :

a. Que le lieu des milieux A_0 des segments AA_1, joignant les couples de points correspondants A, A_1 des surfaces S, S_1, est un cylindre K dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z.

b. Que les droites AA_1 sont normales à ce cylindre K.

Puisque la coordonnée ζ de A_0 est une fonction du paramètre v, la condition (a) équivaut à cette autre que les coordonnées ξ, η soient des fonctions de l'autre paramètre u.

On doit donc avoir [formules (2)]

$$(12) \qquad \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0.$$

La condition (b) est vérifiée, si les droites AA_1 sont normales aux sections droites correspondantes de K (représentées par l'équation $v = \text{const.}$). Or les cosinus directeurs de la tangente aux lignes $v = \text{const.}$ sont proportionnels aux quantités

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial u},$$

et ceux de la droite AA_1 sont proportionnels aux différences

$$f - F, \qquad \varphi - \Phi.$$

Il s'ensuit que la condition ultérieure à vérifier est exprimée par l'équation

$$(13) \qquad (f - F)\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial u}\right) + (\varphi - \Phi)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\right) = 0.$$

Conséquemment, les surfaces S, S_1 ne peuvent pas être prises arbitrairement d'avance, les fonctions f, φ, F, Φ, ψ, t étant liées par les relations (12), (13).

§ VII.

Exemple. — Les surfaces S, S_1 sont définies par les équations

$$(14)\quad \begin{cases} x = l(u) + m(v), \\ y = l_1(u) + m_1(v), \\ z = \psi(v), \end{cases}$$

$$(15)\quad \begin{cases} x_1 = \lambda(u) + \mu(v), \\ y_1 = \lambda_1(u) + \mu_1(v), \\ z_1 = \psi(v). \end{cases}$$

Les conditions (12) donnent

$$(16)\quad \mu(v) = -m(v) + \alpha, \qquad \mu_1(v) = -m_1(v) + \beta,$$

(α, β constantes) et la condition (13) se réduit à

$$(17)\quad \begin{cases} (l-\lambda)(l'+\lambda') + (2m-\alpha)(l'+\lambda') \\ \quad + (l_1-\lambda_1)(l'_1+\lambda'_1) + (2m_1-\beta)(l'_1+\lambda'_1) = 0, \end{cases}$$

d'où, en dérivant par rapport à v,

$$m'(l'+\lambda') + m'_1(l'_1+\lambda'_1) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{m'_1}{m'} = -\frac{l'+\lambda'}{l'_1+\lambda'_1}.$$

En remarquant que le premier membre est une fonction de v et le deuxième une fonction de u, on doit avoir

$$\frac{m'_1}{m'} = a, \qquad \frac{l'+\lambda'}{l'_1+\lambda'_1} = -a,$$

a étant une constante.

On trouve par intégration

$$(18)\quad m_1 = am + b, \qquad \lambda_1 = -\frac{\lambda + l + al_1 + c}{a}$$

(b, c constantes); et, en vertu de ces équations, on déduit de l'égalité (17)

$$[(a^2+1)\lambda-(a^2-1)l+2al_1+a^2\alpha+2ab-a\beta+c](l'+\lambda')=0.$$

Celle-ci se dédouble de la façon suivante :

$$(19)\quad \begin{cases} l'+\lambda'=0, \\ (a^2+1)\lambda-(a^2-1)l+2al_1+a^2\alpha+2ab-a\beta+c=0. \end{cases}$$

Si la première condition (19) a lieu, l'intégration donne

$$(20)\qquad \lambda=-l+e, \qquad (e=\text{const.}),$$

ce qui réduit la deuxième équation (18) à cette autre

$$(21)\qquad \lambda_1=-l_1-\frac{c+e}{a}.$$

Dans ce cas, les équations (14), (15), en vertu des égalités (16), (18), (20), (21), deviennent

$$(22)\quad \begin{cases} x=l(u)+m(v), \\ y=l_1(u)+a\,m(v)+b, \\ z=\psi(v), \end{cases}$$

$$(23)\quad \begin{cases} x_1=-l(u)-m(v)+(\alpha+e), \\ y_1=-l_1(u)-am(v)-b+\left(\beta-\dfrac{c+e}{a}\right), \\ z_1=\psi(v); \end{cases}$$

et, comme les équations (2) donnent

$$(24)\quad \xi=\frac{\alpha+e}{2}, \qquad \eta=\frac{1}{2}\left(\beta-\frac{c+e}{a}\right), \qquad \zeta=\psi(v),$$

on en conclut que le cylindre ichnographique se réduit à une droite; les deux surfaces S, S_1 sont donc égales.

Si la deuxième condition (19) a lieu, on en déduit

$$\lambda=\frac{(a^2-1)l-2al_1-a^2\alpha-2ab+a\beta-c}{a^2+1}.$$

Si donc on suit un développement tout à fait analogue au précédent, on trouve que les équations (22) restent inaltérées et (23), (24) sont remplacées par les suivantes :

$$(25)\quad\begin{cases} x_1 = \dfrac{(a^2-1)\,l(u) - 2a\,l_1(u)}{a^2+1} - m(v) + \dfrac{\alpha + a\beta - 2ab - c}{a^2+1}, \\ y_1 = -\dfrac{2a\,l(u) + (a^2-1)\,l_1(u)}{a^2+1} - am(v) + \dfrac{a(\alpha + a\beta - ab - c) + b}{a^2+1}, \\ z_1 = \psi(v), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{a^2\,l(u) - a\,l_1(u)}{a^2+1} + \dfrac{\alpha + a\beta - 2ab - c}{2(a^2+1)}, \\ \eta = \dfrac{-al(u) + l_1(u)}{a^2+1} + \dfrac{a(\alpha + a\beta - c) + 2b}{2(a^2+1)}, \\ \zeta = \psi(v). \end{cases}$$

Comme les dernières équations donnent

$$\xi + a\eta = \frac{\alpha + a\beta - c}{2},$$

on en conclut que, dans ce cas, le cylindre ichnographique se réduit à un plan et que les deux surfaces S, S_1 représentées par les équations (22), (25), sont symétriques par rapport à ce plan.

§ VIII.

En supposant que x, y, ξ, η soient liées par les relations

$$x = f(\xi), \qquad y = \varphi(\eta),$$

la condition fondamentale (1) fait voir que : *la section droite du cylindre ichnographique est représentée par l'équation*

$$\xi^2 + \eta^2 + c = 2\int f(\xi)\,d\xi + 2\int \varphi(\eta)\,d\eta.$$

En particulier : *Quand* $x = a\xi$. $y = b\eta$, *le cylindre ichnographique a pour section droite la conique à centre*

$$(a-1)\xi^2 + (b-1)\eta^2 = c.$$

La ligne objective L *et sa symétrique* L_1 *sont placées sur deux cylindres, dont les sections droites sont les deux coniques à centre*

$$\frac{a-1}{a^2}x^2 + \frac{b-1}{b^2}y^2 = c, \qquad \frac{a-1}{(2-a)^2}x_1^2 + \frac{b-1}{(2-b)^2}y_1^2 = c.$$

Pareillement, quand ont lieu les relations

$$\xi = F(x), \qquad \eta = \Phi(y),$$

ou bien les suivantes

$$x_1 = \lambda(x), \qquad y_1 = \mu(y),$$

la section droite du cylindre contenant la ligne objective L est représentée respectivement par les équations

$$F^2(x) + \Phi^2(y) - 2\int x\,F'(x)\,dx - 2\int y\,\Phi'(y)\,dy = c,$$

$$\begin{aligned}&\lambda^2(x) + \mu^2(y) - (x^2+y^2)\\ &\quad - 2x\,\lambda(x) - 2y\,\mu(y) + 4\int \lambda(x)\,dx + 4\int \mu(y)\,dy = c,\end{aligned}$$

c étant une constante.

Les sections droites l, l_1 *des cylindres contenant les lignes symétriques* L, L_1, *peuvent-elles devenir deux courbes homothétiques, après la rotation de l'une d'entre elles autour d'un point?*

Si l'origine des axes est le centre de rotation (ce qui n'est pas une particularité) on doit avoir

(26) $\quad x_1 = k(x\cos\theta - y\sin\theta), \qquad y_1 = k(x\sin\theta + y\cos\theta),$

k et θ étant deux constantes.

Dans cette hypothèse, la condition (8) devient

$$x\,dx + y\,dy = \frac{2k\sin\theta}{k^2 - 1}(y\,dx - x\,dy),$$

c'est-à-dire (en posant $x = \mathrm{R}\cos u$, $y = \mathrm{R}\sin u$)

$$\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}} = \frac{2k\sin\theta}{1-k^2}\,du.$$

On trouve par intégration

$$(27)\qquad \mathrm{R} = a e^{\frac{2k\sin\theta}{1-k^2}u},$$

a étant une constante arbitraire.

De même, en posant $x_1 = \mathrm{R}_1\cos u_1$, $y_1 = \mathrm{R}_1\sin u_1$, on en déduit

$$\mathrm{R}_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = k\mathrm{R}, \qquad \cot u_1 = \frac{x_1}{y_1} = \cot(u+\theta),$$

et conséquemment

$$(28)\qquad \mathrm{R}_1 = ak e^{\frac{2k\sin\theta}{1-k^2}(u_1-\theta)}.$$

On a, en outre,

$$\xi = \frac{x + x_1}{2} = \frac{(1 + k\cos\theta)x - k\sin\theta y}{2},$$

$$\eta = \frac{y + y_1}{2} = \frac{k\sin\theta x + (1 + k\cos\theta)y}{2},$$

d'où il suit

$$\mathrm{R}_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{\sqrt{k^2 + 2k\cos\theta + 1}}{2}\mathrm{R},$$

$$\cot u_0 = \frac{\xi}{\eta} = \frac{(1 + k\cos\theta)\cot u - k\sin\theta}{k\sin\theta\cot u + (1 + k\cos\theta)}.$$

En résolvant la dernière équation par rapport à $\cot u$, on trouve

$$\cot u = \frac{k\sin\theta + (1 + k\cos\theta)\cot u_0}{(1 + k\cos\theta) - k\sin\theta\cot u_0}$$

$$= \cot\left[u_0 + \operatorname{arc\,cot}\left(-\frac{1 + k\cos\theta}{k\sin\theta}\right)\right].$$

On a donc

$$(29) \qquad R_0 = \frac{a\sqrt{k^2 + 2k\cos\theta + 1}}{2}\, e^{\frac{2k\sin\theta}{1-k^2}\left[u_0 + \operatorname{arc\,cot}\left(-\frac{1+k\cos\theta}{k\sin\theta}\right)\right]}.$$

Les équations (27), (28), (29) démontrent que *les projections l, l_1 des lignes symétriques* L, L_1 *sur le plan coordonné $z = 0$ et la section droite du cylindre ichnographique* K *sont trois spirales logarithmiques égales* ([1]), *ayant leurs pôles en un même point* (*l'origine*).

Remarque. — Les trois spirales logarithmiques reviennent à trois cercles, quand $\theta = 0$, ou $\theta = \pi$.

Les deux lignes symétriques L, L_1 *peuvent-elles être des lignes égales, avec la condition que les couples de points homologues dans l'égalité soient aussi correspondants dans la symétrie?*

Puisqu'on a toujours $z_1 = z$, la propriété susdite est vérifiée quand ont lieu les relations qu'on peut déduire des équations (26), en y supposant $k = 1$.

Dans cette hypothèse, on a

$$y\,dx - x\,dy = 0,$$

d'où, par intégration,

$$y = \alpha x,$$

α étant une constante.

Cette équation (en remarquant que $x = x_1\cos\theta + y_1\sin\theta$, $y = -x_1\sin\theta + y_1\cos\theta$) donne

$$y_1 = \frac{\sin\theta + \alpha\cos\theta}{\cos\theta - \alpha\sin\theta}\, x_1.$$

([1]) Ce résultat n'est pas en contradiction avec la condition posée dans le problème, comme on peut le supposer au premier abord; en effet, deux spirales logarithmiques semblables sont aussi des lignes égales.

En outre

$$\eta = \frac{y + y_1}{x + x_1}\xi = \frac{\sin\theta + \alpha(1 + \cos\theta)}{(1 + \cos\theta) - \alpha\sin\theta}\xi.$$

Cette analyse démontre que les cylindres projetant les lignes symétriques L, L_1 sur le plan $z = 0$, et le cylindre ichnographique K sont réduits à trois plans passant par une droite.

On doit donc répondre négativement à la question énoncée plus haut.