Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 92-99

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__92_2>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1722.

(1896, p. 152.)

Par un foyer F *d'une conique donnée on mène une corde quelconque* MM'. *Le cercle de diamètre* MM' *rencontre la conique en deux autres points* M_1 *et* M'_1. *Montrer que :*

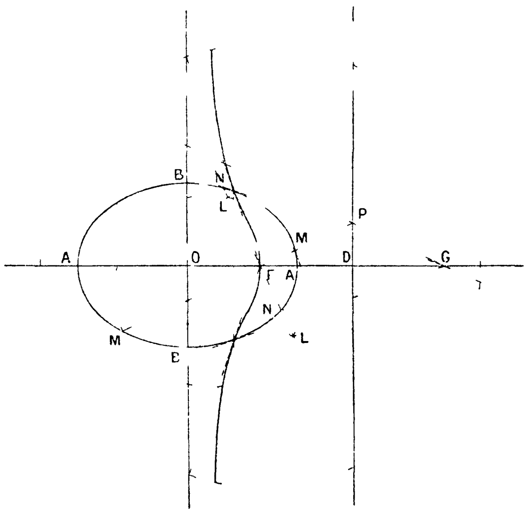
1° *La droite* $M_1M'_1$ *passe par un point fixe;*

2° *Le lieu des points de rencontre des sécantes communes au cercle et à la conique se compose d'une droite et d'une cubique.* (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. E. Malo.

Soient désignés par P, Q, R les trois points de rencontre des sécantes communes à la conique et au cercle $\overset{\frown}{\overline{MM'}}$ prises deux à deux. Je dis que l'un d'eux, P, est le point où la corde focale MM' coupe la directrice.



En effet, les points P, Q, R sont caractérisés par cette propriété que chacun des trois côtés du triangle qu'ils forment est la polaire du sommet opposé à la fois par rapport au cercle $\overset{\frown}{\overline{MM'}}$ et par rapport à la conique donnée. Or, la perpendiculaire menée à $\overline{MM'}$ en F est la polaire de P par rapport à la conique, en vertu de la définition même, en Géométrie, du foyer et de la directrice (foyer, point où chaque couple de droites conjuguées est rectangulaire, directrice, polaire du foyer), et aussi par rapport au cercle, d'après les propriétés les plus élémentaires de cette courbe. La deuxième sécante commune au cercle $\widehat{\overline{MM'}}$ et à la conique donnée dans le couple dont fait partie $\overline{MM'}$, est donc la droite passant par P et faisant avec les axes, en sens inverse, le même angle que $\overline{MM'}$: elle passe manifestement par le point G, symétrique de F par rapport à la directrice.

Les points Q et R sont, sur la perpendiculaire à $\overline{MM'}$ menée par F_1, les deux points conjugués à la fois au segment $\overline{NN'}$, intercepté par l'ellipse, et au segment LL′, intercepté par le cercle. L'ordre de la courbe, lieu des points Q et R, est donc mesuré par le nombre 2 augmenté du nombre qui exprime combien de fois, dans le pivotement de la droite $\overline{LL'NN'}$ autour du point fixe F, l'un des points du couple (Q, R) vient en F. Or, quand cela a lieu, comme F est le milieu de $\overline{LL'}$ l'autre point de ce couple est à l'infini, et F est aussi le milieu du segment $\overline{NN'}$. La circonstance envisagée ne se présente donc qu'une seule fois, quand $\overline{LL'NN'}$ est perpendiculaire à l'axe focal, et, par suite, le lieu cherché est bien une cubique, avec un sommet en F et une asymptote perpendiculaire à l'axe focal de la conique donnée.

Il est, du reste, aisé d'en écrire l'équation. Soit ω l'angle que fait la droite $\overline{LL'NN'}$ avec l'axe focal, et, par conséquent, $\omega - \frac{\pi}{2}$ celui que fait, avec ce même axe, la droite $\overline{MM'}$: l'équation qui admet comme racines les longueurs des segments $\overline{FN}$, $\overline{FN'}$ est

$$\Phi(\rho) = (1 - e^2 \cos^2 \omega)\rho^2 + 2pe\rho \cos\omega - p^2 = 0;$$

semblablement l'équation qui détermine le couple de points (L, L′) est

$$\Psi(\rho) = (1 - e^2 \sin^2 \omega)\rho^2 - p^2 = 0.$$

On aura, par suite, pour l'équation déterminant les points doubles de l'involution $\Phi(\rho) + k\Psi(\rho) = 0$,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\frac{\partial \Psi}{\partial p} - \frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial \Psi}{\partial p} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\rho^2 \cos\omega(1 - e^2 \sin^2 \omega) - pe\rho(\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) + p^2 \cos\omega = 0,$$

et il suffit de multiplier par ρ pour passer immédiatement aux coordonnées rectangulaires

$$(a^2x^2+b^2y^2+b^4)x-b^2c(x^2-y^2)=0.$$

L'asymptote, toujours réelle, passe donc par le centre de la conique. Les tangentes issues de F s'obtiennent en coupant l'axe non focal par le cercle décrit de F comme centre avec le rayon $2a$: les points de contact sont sur la conique et sur la polaire du point G.

Autre solution par M. AUDIBERT.

Question 1727.

(1896, p. 200)

Étant donnée une surface quelconque F, *pour laquelle l'indicatrice est* elliptique, *la surface* F', *lieu des centres de courbure de toutes les sections normales ou obliques que l'on peut faire autour de chacun de ses points, est représentée par l'équation*

$$x^2+y^2+z^2=\frac{R_1R_2(x^2+y^2)}{R_2x^2+R_1y^2}\,z,$$

R_1 *et* R_2 *étant les rayons principaux de* F *relatifs au point que l'on considère.*

Cela étant, vérifier que l'aire de la surface F' *et le volume qu'elle enveloppe ont respectivement pour expression*

$$A=\pi\left(\frac{R_1+R_2}{2}\right)\sqrt{R_1R_2},$$

$$V=\frac{\pi}{48}(3R_1^2+2R_1R_2+3R_2^2)\sqrt{R_1R_2}.$$

(A. ISSALY).

SOLUTION

Par M. G. TZITZEICA.

1° Prenons pour axes les tangentes aux sections principales et la normale à la surface F au point O considéré, et considérons toutes les sections ayant la même tangente OT. En vertu du théorème de Meusnier, les centres de courbure de ces sections se trouvent sur un cercle de diamètre $O\omega$, ω étant le centre de courbure de la section normale ZOT; le cercle précédent est situé dans un plan perpendiculaire à OT. La surface F′ est donc engendrée par cette circonférence, qui tourne autour de OZ et se dilate entre les centres principaux de courbure ω_1 et ω_2. Posons

$$\theta = \widehat{\mathrm{TO}x}.$$

Les équations du cercle $\mathrm{O}\omega$ sont alors

$$(1)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{R}z, & \mathrm{R} = \mathrm{O}\omega, \\ y = x \tang\theta. \end{cases}$$

Or, d'après la relation d'Euler,

$$(2)\qquad \frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{\cos^2\theta}{\mathrm{R}_1} + \frac{\sin^2\theta}{\mathrm{R}_2}.$$

En éliminant R et θ entre (1) et (2), on trouve l'équation de l'énoncé pour la surface F′, qui devient une sphère si le point O est un ombilic de F.

2° Je prends pour élément d'aire l'aire limitée par deux positions infiniment voisines du cercle générateur. On a de la sorte

$$d\mathrm{A} = \frac{1}{2}\mathrm{R}^2\,d\theta = \frac{1}{2}\mathrm{R}_1^2\mathrm{R}_2^2\frac{d\theta}{(\mathrm{R}_2\cos^2\theta + \mathrm{R}_1\sin^2\theta)^2},$$

d'où

$$\mathrm{A} = 2\mathrm{R}_1^2\mathrm{R}_2^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(\mathrm{R}_2\cos^2\theta + \mathrm{R}_1\sin^2\theta)^2};$$

donc

$$\mathrm{A} = \pi\left(\frac{\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2}{2}\right)\sqrt{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}.$$

3° De même, en prenant pour élément de volume le volume correspondant à l'élément d'aire, on a

$$d\mathrm{V} = \frac{\mathrm{R}^2\,d\theta}{2}\,\frac{\mathrm{R}}{6} = \frac{1}{12}\mathrm{R}^3\,d\theta,$$

d'où

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{R}_1^3\mathrm{R}_2^3\,d\theta}{(\mathrm{R}_2\cos^2\theta + \mathrm{R}_1\sin^2\theta)^3};$$

donc

$$V = \frac{\pi}{48}(3R_1^2 - 2R_1R_2 + 3R_2^2)\sqrt{R_1R_2}.$$

Note. — Pour trouver les intégrales définies précédentes, on peut procéder de la manière suivante : Considérons l'intégrale immédiate

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{R_2\cos^2\theta + R_1\sin^2\theta} = \frac{\pi}{2\sqrt{R_1R_2}}.$$

Prenant les dérivées de I par rapport à R_1 et R_2, on trouve

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{(R_2\cos^2\theta + R_1\sin^2\theta)^2} = \frac{\pi}{4R_1\sqrt{R_1R_2}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta\, d\theta}{(R_2\cos^2\theta + R\sin^2\theta)^2} = \frac{\pi}{4R_2\sqrt{R_1R_2}}.$$

En faisant la somme, on obtient

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(R_2\cos^2\theta + R_1\sin^2\theta)} = \frac{\pi(R_1 + R_2)}{4R_1R_2\sqrt{R_1R_2}}.$$

En procédant de la même manière, on obtient de I_2 l'intégrale I_3. On pourrait trouver de la sorte une formule générale, pour

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(R_2\cos^2\theta + R_1\sin^2\theta)^n}.$$

Question 1729.

(1896, p 248)

L'équation $xyz + kw^3 = 0$, où x, y, z représentent les coordonnées homogènes d'un point du plan

$$w = ax + by + cz,$$

et k un paramètre arbitraire, représente un système de cubiques qui ont trois points d'inflexion réels situés sur la *droite w; le lieu des autres points d'inflexion se compose de deux droites imaginaires* A *et* B.

Démontrer qu'il existe deux cubiques du système, tangentes à une droite donnée L, *et que les deux points de contact sont conjugués harmoniques relativement aux deux points imaginaires conjugués où la droite* L *rencontre* A *et* B. (A. Legoux.)

SOLUTION

Par M. G. Tzitzéica.

1° La hessienne de la cubique a pour équation

$$3kw(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-2bcyz-2cazx-2abxz)-xyz=0.$$

D'où résulte que trois des points d'inflexion sont sur la droite w, ce qui était d'ailleurs visible sur l'équation de la cubique même. Si l'on élimine k entre l'équation précédente et celle de la cubique, on trouve pour le lieu des autres points d'inflexion

$$(1)\qquad (ax-by)^2+(by-cz)^2+(cz-ax)^2=0$$

deux droites imaginaires qui se rencontrent dans le point réel $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$.

2° L'équation du faisceau de droites qui joignent l'origine aux points d'intersection de la cubique avec la droite L

$$ux+vy=z$$

est

$$(2)\qquad xy(ux+vy)+kt^3=0.$$

où

$$t\equiv(a+cu)x+(b+cv)y.$$

Pour que la cubique soit tangente à L il faut que (2) admette un facteur carré. Ce facteur carré est d'ailleurs un facteur du jacobien des deux fonctions de x et y,

$$xy(ux+vy)\quad\text{et}\quad t^3.$$

Ce jacobien a pour équation

$$t^2[(a+cu)ux^2+2(av-bu)xy-(b+cv)vy^2]=0:$$

il comprend le facteur singulier t^2 qui représente la droite qui joint l'origine au point d'intersection de w et de L. Il reste alors pour l'équation des droites qui joignent l'origine aux deux points de contact

$$(3)\quad (a+cu)ux^2 + 2(av-bu)xy - (b+cv)vy^2 = 0.$$

D'ailleurs, l'équation du faisceau des droites qui joignent l'origine aux points d'intersection des droites A et B avec L est

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &(a^2+c^2u^2-acu)x^2-(ab+bcu+acv-2c^2uv)xy \\ &\qquad\qquad\qquad + (b^2+c^2v^2-bcv)y^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Il reste à voir que les deux faisceaux (3) et (4) sont conjugués harmoniques l'un par rapport à l'autre, ce qu'on vérifie aisément.

Autre solution de M. AUDIBERT.