A. VACQUANT

Agrégation des sciences mathématiques. Concours de 1898. Solution de la question de mathématiques élémentaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 79-86

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__79_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES. CONCOURS DE 1898.
SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES;

PAR M. A. VACQUANT,
Ancien élève de l'École Polytechnique,
Professeur au lycée de Nancy.

On considère un triangle T *dont les sommets sont* A, B, C, *et une droite* Δ *dans son plan. On prend les* *symétriques d'un point* O *quelconque de la droite* Δ *par rapport aux côtés du triangle* T, *et l'on construit le centre* O′ *du cercle circonscrit au triangle ayant pour sommets les trois points ainsi obtenus :*

I. *Trouver le lieu du point* O′ *lorsque le point* O *décrit la droite* Δ. *Ce lieu est une conique* S *dont on discutera le genre en faisant varier la position de la droite* Δ *par rapport au triangle* T. *On indiquera également les positions de* Δ *pour lesquelles* S *lui est tangente ;*

II. *Trouver le lieu du centre de la conique* S *lorsque la droite* Δ *se déplace parallèlement à elle-même.*

Ce lieu est une conique S_1 *qui dépend de la direction de* Δ ;

III. *Trouver le lieu du centre de* S_1 *lorsqu'on fait varier la direction de* Δ ;

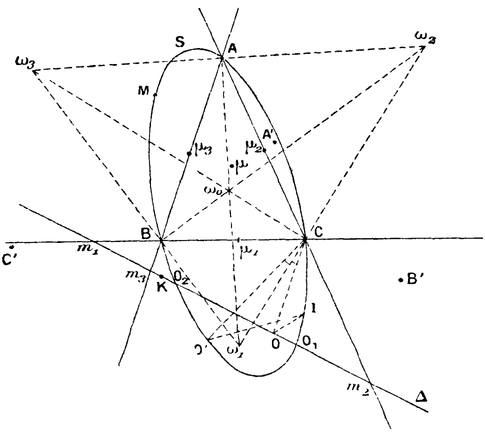
IV. *Démontrer que, par tout point* I *de* S, *on peut mener trois droites* OO′ *et faire voir que deux de ces droites sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites qui joignent le point* I *aux points de rencontre de* Δ *et de* S ;

V. *Dans le cas particulier où la droite* Δ *passe par le centre* ω *d'un cercle inscrit au triangle* T, *on propose de trouver l'enveloppe de la droite* OO′. *Démontrer que, dans ce cas, les centres des trois autres cercles inscrits au triangle* T *et les points de rencontre des diagonales du quadrilatère complet ayant pour côtés* Δ *et les côtés de* T *sont six points placés sur une même conique.*

I. Si l'on considère le point O comme un foyer d'une conique tangente aux trois côtés AB, BC, CA du triangle T, le centre O′ du cercle circonscrit au triangle A′B′C′ ayant pour sommets les symétriques de

O par rapport aux côtés du triangle T est le deuxième foyer réel de cette conique. Soient ω_0, ω_1, ω_2, ω_3 les centres des cercles tangents aux trois côtés du triangle T. Les droites AO′, BO′, CO′ sont respectivement symé-

Fig. 1.



triques des droites AO, BO, CO par rapport aux bissectrices des angles A, B, C du triangle T, ou des angles extérieurs, et ces bissectrices se coupent deux à deux aux points ω. Le point O′ est donc l'*inverse* du point O, le triangle de référence étant ABC. (Consulter, par exemple, le *Traité de Géométrie*, de MM. Rouché et de Comberousse, Note III).

Le point O décrivant une droite Δ, son inverse O′ décrira une conique circonscrite au triangle ABC; en effet, les faisceaux BO′ et CO′, homographiques des faisceaux BO et CO, sont homographiques; donc le lieu de O′ est une conique S passant par B et C; on voit de même qu'elle passe par A. Si Δ rencontre les côtés BC, CA, AB aux points m_1, m_2, m_3 les tangentes en A, B, C à S sont les droites symétriques de Am_1, Bm_2, Cm_3 par rapport aux bissectrices $A\omega_0$, $B\omega_0$, $C\omega_0$.

Les points A' et B' étant les symétriques de O par rapport aux côtés CB, CA du triangle T, on a $CO = CA' = CB'$, et la perpendiculaire élevée à $A'B'$ en son milieu passe par C; de même BO' est perpendiculaire à $A'C'$ et $A'O'$ à $B'C'$; cette autre manière de construire le point O' permet de voir aisément le genre de la conique S. Pour qu'un point O' s'éloigne à l'infini, il faut que BO' et CO' soient parallèles, par suite A', B', C' seront en ligne droite et le point O sera sur le cercle circonscrit au triangle T. Réciproquement, si O est sur le cercle circonscrit au triangle T, les points A', B', C' sont en ligne droite; les rayons BO' et CO', perpendiculaires à $A'C'$ et $A'B'$, sont parallèles, et le point O' est à l'infini. Donc, suivant que la droite Δ ne coupe pas, touche ou coupe le cercle circonscrit au triangle T, la conique S est une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

Il résulte de ce qui précède que l'inverse de la droite de l'infini est le cercle circonscrit au triangle T, ce qui est d'ailleurs facile à établir directement; de ce résultat on déduit immédiatement le genre de la conique S quand Δ se déplace.

Pour que la droite Δ soit tangente à S, il faut et il suffit qu'elle passe par l'un des points ω_0, ω_1, ω_2, ω_3. En effet, l'inverse O' d'un point O de Δ est distinct de O si ce point O n'est pas l'un des points ω; cela résulte de la construction de O'; alors, si la droite Δ ne passe pas par un des points ω, elle rencontre la conique S en deux points O_1 et O_2, réels ou imaginaires, inverses l'un de l'autre et *distincts;* car l'inverse de O_1 qui appartient à la fois à Δ et à S appartient à la fois à S et à Δ, comme ce n'est pas O_1 c'est un autre point O_2 commun à S et Δ;

mais, si Δ passe par l'*un* des points ω, soit ω_1, l'inverse de ω_1 étant ω_1, le point ω_1 appartient à S; d'autre part, si la droite Δ rencontrait S en un autre point O_1 elle la rencontrerait encore au point O_2, inverse de O_1 et distinct de O_1, et par suite en trois points O_1, O_2, ω_1, ce qui est impossible; donc Δ est tangente à S en ω_1. Si la droite Δ passait par deux points ω, elle passerait par un des sommets du triangle T et serait à elle-même son inverse. Donc, pour que la conique S soit tangente à Δ, il faut et il suffit que Δ passe par un seul des points ω, qui est alors le point de contact de Δ et de S.

II. Quand la droite Δ se déplace parallèlement à elle-même, elle passe par un point fixe P situé sur la droite de l'infini; son inverse, la conique S, passe par un point fixe M du cercle circonscrit à T; on a donc à chercher le lieu des centres des coniques S passant par quatre points fixes A, B, C, M. On sait que c'est une conique S_1 passant par le milieu de chacune des six droites obtenues en joignant les quatre points A, B, C, M deux à deux et par les points de rencontre des côtés opposés du quadrilatère ABCM; à ces neuf points on doit ajouter le centre μ du cercle circonscrit au triangle ABC, car ce cercle est une conique S particulière; c'est l'inverse de la droite de l'infini dont la direction est, comme on sait, indéterminée. Si μ_1, μ_2, μ_3 sont les milieux de BC, CA, AB, la conique S_1 passe donc par les quatre points μ, μ_1, μ_2, μ_3 indépendants de la direction de Δ. Comme μ est l'orthocentre du triangle $\mu_1\mu_2\mu_3$, toutes les coniques S_1 sont des hyperboles équilatères.

III. Quand la direction de Δ varie, le lieu des centres des coniques S_1, c'est-à-dire le lieu des centres des hyperboles équilatères passant par les quatre points μ,

μ_1, μ_2, μ_3 est, on vient de le rappeler, une conique qui est, dans le cas actuel, le cercle des neuf points du triangle $\mu_1\mu_2\mu_3$, car les six points obtenus en prenant les milieux des droites joignant deux à deux les points μ, μ_1, μ_2, μ_3 appartiennent au lieu et sont sur le cercle des neuf points du triangle $\mu_1\mu_2\mu_3$.

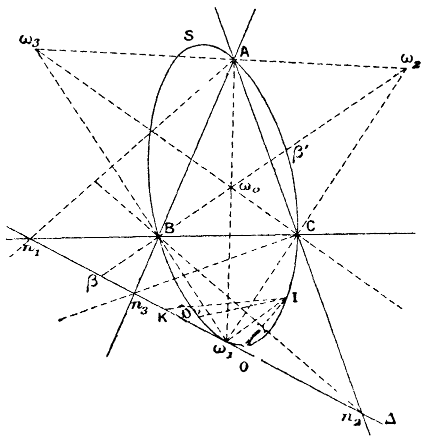
IV. Soit K l'inverse de I; la droite IK est déjà une droite OO′ passant par I; je remarque ensuite que les faisceaux IO, IO′ sont homographiques, comme homographiques au faisceau CO; cela est évident pour le faisceau IO; quant au faisceau IO′, il est homographique au faisceau CO′, lequel est homographique au faisceau CO. Les faisceaux homographiques IO, IO′ ont deux droites doubles qui sont deux droites OO′ passant par I. On a ainsi trois droites OO′ passant par I et il n'y en a pas davantage, car, pour une telle droite, ou O′ coïncide avec I et alors O est en K, ou O′ ne coïncide pas avec I et dans ce cas OO′ est une droite double des faisceaux IO, IO′.

Les droites IO_1 et IO_2 sont deux rayons homologues des faisceaux homographiques IO, IO′; de plus IO_1, considéré comme appartenant à l'un ou à l'autre de ces faisceaux, a toujours le même homologue IO_2; donc ces deux faisceaux sont en involution et les rayons homologues IO_1, IO_2 sont conjugués harmoniques par rapport aux deux rayons doubles qui sont deux droites OO′.

V. Il résulte de ce qui précède que, si la droite Δ est quelconque, l'enveloppe de OO′ est une courbe de troisième classe pour laquelle Δ est une tangente double, car on obtient pour OO′ la droite Δ quand O passe en O_1 ou O_2 en décrivant Δ. On aperçoit le même résultat en considérant la courbe polaire réciproque de l'enveloppe de OO' par rapport à la conique S : c'est une cubique ayant un point double en δ, pôle de Δ, les tangentes au point double étant δO_1 et δO_2.

Maintenant, dans le cas particulier où Δ passe par l'un des points ω, ω_1 par exemple, alors IO_1 et IO_2

Fig. 2.



sont confondus suivant $I\omega_1$; les faisceaux en involution IO, IO' ont un de leurs rayons doubles confondu avec $I\omega_1$; de sorte que toute droite passant par ω_1 est, dans le cas actuel, une tangente à l'enveloppe de OO' qui se compose alors du point ω_1 et d'une conique φ; les deux tangentes à cette conique φ issues d'un point quelconque I de S sont IK et le deuxième rayon double des faisceaux IO, IO'. Cette conique φ passe en ω_1 et y admet pour tangente la droite Δ, comme on le voit aisément en faisant venir I en ω_1. Quelques positions remarquables de O sur Δ vont faire connaître des tangentes à la conique φ. Quand O est au point de rencontre de Δ avec la bissectrice $B\omega_0\omega_2$, le point O' est sur cette bissectrice en son point de rencontre, autre que B, avec la conique S, de sorte que la droite $B\omega_0\omega_2$ est tangente à la conique φ; il en est de même des droites $C\omega_0\omega_3$, $A\omega_2\omega_3$; mais les bissectrices $B\omega_1$, $C\omega_1$ ne sont pas tangentes à φ.

Soient n_1, n_2, n_3 les points de rencontre de Δ avec les côtés BC, CA, AB du triangle T. Quand O vient en n_1 le point O′ vient en A; donc la diagonale An_1 du quadrilatère complet $BCn_2n_3n_1A$ est tangente à la conique φ; on voit de même que les deux autres diagonales Bn_2 et Cn_3 sont tangentes à φ.

Les côtés du triangle formé par les diagonales du quadrilatère complet $BCn_2n_3n_1A$ et ceux du triangle $\omega_0\omega_2\omega_3$ sont donc tangents à la conique φ, et l'on sait que, quand deux triangles sont circonscrits à une même conique, leurs six sommets sont sur une conique.