NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ANTOINE PLESKOT

Nouveau procédé pour résoudre les équations du troisième degré

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 65-66

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__65_0>

[A3k]

NOUVEAU PROCÉDÉ POUR RÉSOUDRE LES ÉQUATIONS DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. ANTOINE PLESKOT,
Professeur à l'École royale de Plzeň (Bohême).

Nous allons chercher dans l'équation du second degré

$$x^2 + ax + b = 0$$

la relation entre a et b, de sorte qu'une de ses racines soit le carré de l'autre.

Si x est une de ses racines, on aura

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{aligned} x + x^2 &= -a, \\ x^3 &= b. \end{aligned} \right.$$

On tire tout de suite de ces deux équations

$$x = \varepsilon \sqrt[3]{b}, \qquad \text{où} \qquad \varepsilon = \sqrt[3]{1}$$

et

$$(\beta) \qquad \varepsilon \sqrt[3]{b} + \varepsilon^2 \sqrt[3]{b^2} = -a.$$

Mais on peut exprimer la relation entre a et b sous une autre forme, en déterminant la résultante des équations (α); on trouvera aisément

$$(\gamma) \qquad a^3 - 3ab + b^2 + b = 0.$$

On considère maintenant, dans l'équation (γ), a comme une inconnue, et alors ses racines sont données par l'équation (β). On peut se servir de cette remarque pour résoudre l'équation

$$(1) \qquad x^3 + px + q = 0,$$

si on lui donne la forme de l'équation (γ).

A cet effet, formons une équation dont les racines soient λ fois les racines de l'équation (1).

Cette équation est la suivante :

$$x^3 + p\lambda^2 x + q\lambda^3 = 0. \tag{2}$$

Si cette équation doit avoir la forme de l'équation (γ), il en résulte que

$$p\lambda^2 = -3b,$$
$$q\lambda^3 = b + b^2.$$

En éliminant b entre ces équations, on obtient la valeur de λ. L'équation résultante est

$$\lambda^2 - 2\frac{\lambda q}{p^2} - \frac{3}{p} = 0;$$

il en résulte

$$\lambda = \frac{9q}{2p^2} \pm \sqrt{\frac{81q^2}{4p^4} + \frac{3}{p}}, \tag{3}$$

relation où l'on peut choisir soit le signe + soit le signe —. Mais puisque

$$b = -\frac{p\lambda^2}{3},$$

les racines de l'équation (2), d'après (β), sont

$$x = -\varepsilon\sqrt[3]{-\frac{p\lambda^2}{3}} - \varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{p^2\lambda^4}{9}};$$

d'autre part, les racines de l'équation (1) sont λ fois plus petites; donc elles sont données par la formule

$$x = -\varepsilon\sqrt[3]{-\frac{p}{3\lambda}} - \varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{p^2\lambda}{9}}.$$

Si l'on substitue à λ la valeur fournie par l'équation (3), les racines vont prendre la forme connue

$$x = \varepsilon\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \varepsilon^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$