H. Duport

Démonstration de quelques théorèmes de cinématique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 5-31

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[R1c]

DÉMONSTRATION DE QUELQUES THÉORÈMES DE CINÉMATIQUE;

PAR M. H. DUPORT,
Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.

Les propositions que j'ai en vue sont les suivantes :

I. Le mouvement d'une figure plane dans son plan peut être produit par le roulement d'une courbe liée à la figure sur une courbe fixe.

II. Le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe peut être produit par le roulement d'un cône lié au corps sur un cône fixe de même sommet.

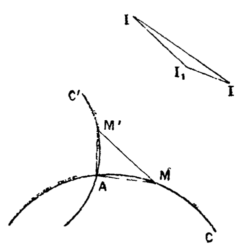
III. Le mouvement général d'un corps solide peut être produit en faisant mouvoir une surface réglée liée au corps, de façon qu'elle touche constamment une surface réglée fixe le long d'une génératrice.

Malgré l'importance de ces théorèmes, les démonstrations qui en sont données laissent beaucoup à désirer. Géométriquement on les déduit presque sans transition des théorèmes correspondants sur le déplacement discontinu. Analytiquement les démonstrations sont simples et bien connues, mais elles laissent de côté la discussion qui accompagne le troisième cas, ainsi que les propositions et les formules concernant les mouvements que l'on obtient quand on part des courbes, des cônes ou des surfaces qui figurent dans les énoncés.

La présente Note a pour objet de combler cette lacune [1] :

I. Soit d'abord une figure plane en mouvement. Figurons la courbe C lieu des centres instantanés de rotation dans le plan, et dans la position qu'elle occupe à l'époque t, la courbe C′ lieu des points de la figure

Fig. 1.



mobile qui coïncident à chaque instant avec le centre instantané de rotation au même instant. Ces deux courbes ont en commun le centre instantané de rotation A à l'époque t. Soit M le point de la courbe C qui sera centre instantané de rotation à l'époque $t+h$, M′ le point de la courbe mobile qui viendra à cette époque coïncider avec le point M. On peut amener la courbe C′ dans la position qu'elle occupera à l'époque $t+h$ par une translation telle que tous ses points décrivent des

[1] La méthode analytique consiste dans l'emploi d'un trièdre mobile. C'est de ce procédé que M. Antomari s'est servi dans son excellente thèse pour retrouver les propriétés déjà connues des surfaces réglées et en découvrir de nouvelles.

droites égales et parallèles à $M'M$, puis par une rotation autour de M, de l'angle φ dont la figure plane a tourné pendant le temps h.

Soit I un point quelconque de la figure. Il vient d'abord de I en I_1, de façon que le segment II_1 soit égal et parallèle à $M'M$, puis de I_1 en I' par une rotation autour de M de l'angle φ. Joignons $I_1 I'$ et II'. On a

$$\frac{(II')}{h} = \frac{(II_1)}{h} + \frac{(I_1 I')}{h}.$$

Faisons tendre h vers zéro. $\frac{(II')}{h}$ a pour limite la vitesse du point I à l'époque t, c'est-à-dire un segment perpendiculaire à AI et égal à ωAI, ω étant la limite de $\frac{\varphi}{h}$. $\frac{(I_1 I')}{h}$ a même limite que $\frac{(II')}{h}$ puisque les points I_1 et I' ont pour limite I, et puisque le point M a pour limite A. On voit donc que le segment $\frac{(II_1)}{h}$ et, par suite, le segment $\frac{(M'M)}{h}$ doivent avoir pour limite zéro.

Or on a

$$\frac{(M'M)}{h} = \frac{(AM)}{h} - \frac{(AM')}{h}.$$

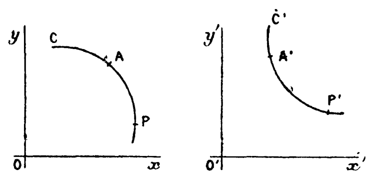
$\frac{(AM)}{h}$ a pour limite la vitesse d'un mobile qui parcourrait la courbe C, de façon à se trouver à chaque instant au centre instantané de rotation. $\frac{(AM')}{h}$ a pour limite la vitesse, dans la figure mobile supposée fixe à l'époque t, d'un mobile qui parcourrait la courbe C' de façon à se trouver à chaque instant au point qui coïncidera à cet instant avec le centre instantané de rotation. Ces deux vitesses devant être les mêmes, d'abord les courbes C et C' devront être tangentes en A; ensuite, si l'on désigne par s et s' les arcs comptés sur C et C' à partir de deux origines O et O′ et terminés en M et M′, on devra avoir

$$\frac{ds}{dt} = \pm \frac{ds'}{dt}.$$

Si l'on compte les arcs s et s' dans les sens où les mobiles se déplacent sur les courbes C et C′ pendant le mouvement, on devra prendre le signe $+$ dans le second membre de l'équation précédente, et si les points O et O′ doivent venir coïncider à une certaine époque, on aura $s = s'$, et la courbe mobile roulera effectivement sur la courbe fixe.

En modifiant légèrement la démonstration précédente, on voit aisément que, si une courbe C′ roule sur une courbe C, le point de contact est à chaque instant le centre instantané de rotation dans le mouvement d'une figure plane liée à C′. Proposons-nous maintenant de trouver les formules qui représentent le mouvement obtenu en faisant rouler une courbe sur une autre. Soient C

Fig. 2.



la courbe fixe rapportée à deux axes Ox, Oy; a et b les coordonnées d'un point A en fonction de l'arc compté sur la courbe dans un sens déterminé à partir d'une origine P. Soit C′ la courbe mobile; $O'x'$, $O'y'$ des axes liés à cette courbe, a' et b' les coordonnées d'un point en fonction de l'arc s' compté à partir d'une origine fixe P′ dans un sens déterminé.

Supposons maintenant que la courbe C′ soit placée de façon à rouler sur la courbe C, et admettons que les points A, A′ doivent coïncider à une certaine époque et qu'il en soit de même pour P et P′. Supposons enfin, que les arcs s et s' soient comptés dans les sens PA, P′A′ ou dans les sens opposés. Avec ces hypothèses, s et s' sont la même fonction du temps t achevant de définir le roulement.

Considérons en A deux axes de coordonnées, l'un la tangente Ax_1 à la courbe dans le sens des arcs croissants, l'autre la normale Ay_1 faisant avec cette tangente l'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens des axes. Soient $A'x'_1$, $A'y'_1$ les axes analogues pour la seconde courbe. Les axes Oxy, $O'x'y'$ ayant même sens par hypothèse, quand C′ est placée sur C, de façon que A′ coïncide avec A et que les deux courbes soient tangentes, les axes Ax_1y_1, $A'x'_1y'_1$ coïncident.

On a pour passer de Oxy à Ax_1y_1 les formules

$$x = a + x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi,$$
$$y = b + x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi,$$

φ désignant l'angle de la tangente Ax_1 avec Ox. On a

$$\cos\varphi = \frac{da}{ds}, \qquad \sin\varphi = \frac{db}{ds}.$$

On a de même pour passer de $O'x'y'$ à $A'x'_1y'_1$ les formules

$$x' = a' + x'_1 \cos\varphi' - y'_1 \sin\varphi',$$
$$y' = b' + x'_1 \sin\varphi' + y'_1 \cos\varphi',$$

φ' désignant l'angle de $A'x'_1$ avec $O'x'$. On a

$$\cos\varphi' = \frac{da'}{ds'}, \qquad \sin\varphi' = \frac{db'}{ds'}.$$

Si nous écrivons que l'on a $x_1 = x'_1$, $y_1 = y'_1$, nous aurons écrit que les deux courbes roulent l'une sur l'autre et l'on aura donc pour les formules de transformation permettant de passer des axes fixes aux axes liés à la figure mobile

$$(x-a)\cos\varphi+(y-b)\sin\varphi = (x'-a')\cos\varphi'+(y'-b')\sin\varphi'.$$
$$-(x-a)\sin\varphi+(y-b)\cos\varphi = -(x'-a')\sin\varphi'+(y'-b')\cos\varphi'.$$

On les résout aisément par rapport à x et y et l'on peut en déduire l'expression connue de la vitesse de rotation de la figure mobile.

II. Soit maintenant un corps solide mobile autour d'un point fixe O. Considérons le cône, lieu des axes instantanés de rotation dans l'espace, et dans la position qu'il occupe à l'époque t, le cône lieu des droites du corps qui coïncident à chaque instant avec l'axe instantané de rotation à cet instant.

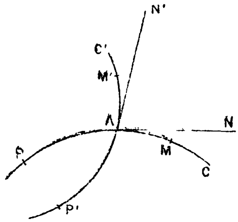
Limitons les deux cônes d'un même côté du sommet et considérons sur les deux demi-cônes ainsi obtenus les courbes d'intersection avec la sphère de rayon égal à l'unité ayant pour centre le point fixe. Soient C et C' ces courbes.

A l'époque t, les deux cônes ont en commun l'axe instantané de rotation à cette époque. Les deux courbes ont donc en commun un point A. Je dis qu'elles sont tangentes en ce point et que de plus, si l'on considère les arcs comptés sur les deux courbes à partir de deux points P et P' qui sont l'un, le pôle instantané de rotation à une époque t_0, l'autre le point de la courbe C' qui coïncide avec P à l'époque t_0, les arcs PA, P'A sont égaux.

Pour le démontrer, nous supposerons la première courbe parcourue par un mobile qui se trouve à chaque instant au pôle instantané de rotation à cet instant, la seconde par un mobile qui se trouve à chaque instant au point de cette courbe qui coïnciderait à cet instant avec le pôle instantané de rotation.

Soient M et M' les positions des deux mobiles à l'époque $t+h$; pour amener le corps de la position qu'il occupe à l'époque t à celle qu'il occupe à l'époque

Fig. 3.



$t+h$, on peut d'abord amener OM' sur OM par une rotation de l'angle M'OM autour d'un axe perpendiculaire en O au plan M'OM, puis imprimer au corps une rotation convenable autour de OM. Supposons que l'on fasse tendre h vers zéro et voyons quelle sera la vitesse d'un point quelconque I. Dans le premier mouvement le point I vient en I_1, dans le second en I'; on a

$$\frac{(II')}{h} = \frac{(II_1)}{h} + \frac{(I_1I')}{h}.$$

$\frac{(II')}{h}$ a pour limite la vitesse du point I. $\frac{(II_1)}{h}$ a pour limite la vitesse du point I dans un mouvement de rotation autour de la position limite de la perpendiculaire au plan M'OM avec une vitesse angulaire égale à la limite de l'expression $\frac{\text{angle}\,M'OM}{h}$. Cherchons la limite du segment $\frac{(MM')}{h}$; sa grandeur limite est la vitesse angulaire cherchée, et sa direction nous donnera la position limite du plan M'OM. On a

$$\frac{(MM')}{h} = \frac{(AM')}{h} - \frac{(AM)}{h} = (v) - (v'),$$

(v) et (v') étant les vitesses à l'époque t des mobiles considérés précédemment. Si donc on représente par AN et AN' ces vitesses, on voit que le rapport $\frac{(MM')}{h}$ a pour limite (NN'). Le plan M'OM aura pour limite le plan mené par OA parallèlement à NN'. D'autre part, $\frac{(I_1 I')}{h}$ a pour limite la vitesse de I dans un certain mouvement de rotation autour de OA, puisque les points I_1 et I' ont pour limite I et que le point M a pour limite A. Comme, en définitive, la vitesse de I doit être la même que dans un mouvement de rotation autour de OA et qu'elle s'obtient en composant une vitesse de rotation autour d'un axe perpendiculaire à OA et une vitesse de rotation autour de OA, il faut que la première disparaisse. Il faut donc que le segment NN' soit nul, c'est-à-dire que les points N et N' coïncident. On voit donc que les courbes C et C' seront tangentes en A et que l'on aura $v = v'$, c'est-à-dire

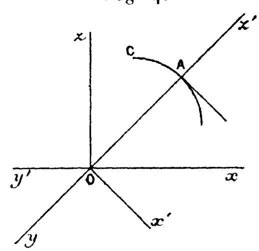
$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds'}{dt},$$

s et s' désignant les arcs PA, P'A, et, comme on a à la fois $s = s' = 0$, on en déduit $s = s'$. Le théorème est donc démontré. De très légères modifications à cette démonstration permettent de faire voir, que quand un cône roule sur un cône fixe de même sommet, l'arête de contact est à chaque instant l'axe instantané de rotation dans le mouvement d'un corps lié au cône mobile.

Proposons-nous maintenant de trouver les formules qui permettent d'étudier le mouvement obtenu en faisant rouler un cône sur un cône fixe de même sommet.

Soient Ox, Oy, Oz des axes rectangulaires fixes ayant pour origine le sommet commun des deux cônes. Soit A un point de la courbe C. Considérons un système d'axes formé de la droite OA pour axe des z', de la parallèle menée par O à la tangente à la courbe dans le sens

Fig. 4.



positif pour axe des x', enfin de la perpendiculaire Oy' au plan $Ox'z'$ telle que les deux trièdres $Oxyz$, $O'x'y'z'$ aient même sens. Soient

$$x = \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z',$$
$$y = \beta x' + \beta' y' + \beta'' z',$$
$$z = \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z',$$

les formules de transformation permettant de passer de l'un de ces systèmes à l'autre.

Le point A ayant pour coordonnées a, b, c, fonctions de l'arc s définissant le cône, on a

$$\alpha'' = a, \qquad \alpha = \frac{da}{ds}, \qquad \alpha' = b\frac{dc}{ds} - c\frac{db}{ds},$$
$$\beta'' = b, \qquad \beta = \frac{db}{ds}, \qquad \beta' = c\frac{da}{ds} - a\frac{dc}{ds},$$
$$\gamma'' = c, \qquad \gamma = \frac{dc}{ds}, \qquad \gamma' = a\frac{db}{ds} - b\frac{da}{ds}.$$

Soient ξ, η, ζ les angles de la normale principale en A avec les axes et ρ le rayon de courbure, on a

$$\frac{d^2 a}{ds^2} = \frac{\cos\xi}{\rho}, \qquad \frac{d^2 b}{ds^2} = \frac{\cos\eta}{\rho}, \qquad \frac{d^2 c}{ds^2} = \frac{\cos\zeta}{\rho}.$$

Soit φ le rayon de courbure sphérique, inférieur à $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue, positif si le centre de courbure sphérique est du côté de Oy' par rapport à Oz', négatif dans le cas contraire.

Dans le premier cas, on a les relations

$$\alpha' \cos\xi + \beta' \cos\eta + \gamma' \cos\zeta = \cos\varphi, \qquad \rho = \sin\varphi,$$
$$\alpha'' \cos\xi + \beta'' \cos\eta + \gamma'' \cos\zeta = -\sin\varphi,$$

et dans le second

$$\alpha' \cos\xi + \beta' \cos\eta + \gamma' \cos\zeta = -\cos\varphi, \qquad \rho = -\sin\varphi,$$
$$\alpha'' \cos\xi + \beta'' \cos\eta + \gamma'' \cos\zeta = \sin\varphi.$$

On aura donc dans tous les cas les relations

$$\alpha' \frac{\cos\xi}{\rho} + \beta' \frac{\cos\eta}{\rho} + \gamma' \frac{\cos\zeta}{\rho} = \cot\varphi,$$
$$\alpha'' \frac{\cos\xi}{\rho} + \beta'' \frac{\cos\eta}{\rho} + \gamma'' \frac{\cos\zeta}{\rho} = -1;$$

on a également

$$\alpha \frac{\cos\xi}{\rho} + \beta \frac{\cos\eta}{\rho} + \gamma \frac{\cos\zeta}{\rho} = 0.$$

On a donc

$$\alpha \frac{d^2 a}{ds^2} + \beta \frac{d^2 b}{ds^2} + \gamma \frac{d^2 c}{ds^2} = 0,$$
$$\alpha' \frac{d^2 a}{ds^2} + \beta' \frac{d^2 b}{ds^2} + \gamma' \frac{d^2 c}{ds^2} = \cot\varphi,$$
$$\alpha'' \frac{d^2 a}{ds^2} + \beta'' \frac{d^2 b}{ds^2} + \gamma'' \frac{d^2 c}{ds^2} = -1.$$

On en tire

$$\frac{d^2 a}{ds^2} = \alpha' \cot\varphi - \alpha'', \quad \frac{d^2 b}{ds^2} = \beta' \cot\varphi - \beta'', \quad \frac{d^2 c}{ds^2} = \gamma' \cot\varphi - \gamma''.$$

Considérons maintenant s comme une fonction du temps t et posons

$$\frac{ds}{dt} = v,$$

on aura finalement les formules

$$\frac{d\alpha}{dt} = \nu(\alpha' \cot\varphi - \alpha''), \qquad \frac{d\alpha'}{dt} = -\nu\alpha\cot\varphi, \qquad \frac{d\alpha''}{dt} = \nu\alpha,$$
$$\frac{d\beta}{dt} = \nu(\beta' \cot\varphi - \beta''), \qquad \frac{d\beta'}{dt} = -\nu\beta\cot\varphi, \qquad \frac{d\beta''}{dt} = \nu\beta,$$
$$\frac{d\gamma}{dt} = \nu(\gamma' \cot\varphi - \gamma''), \qquad \frac{d\gamma'}{dt} = -\nu\gamma\cot\varphi, \qquad \frac{d\gamma''}{dt} = \nu\gamma.$$

Faisons pour le cône mobile supposé rapporté à des axes liés à lui ce que nous avons fait pour le cône fixe, en affectant toutes les quantités de l'indice 1. Supposons que les arcs soient comptés sur les deux courbes C et C′ dans des sens tels que les arcs comptés dans le même sens soient destinés à rouler l'un sur l'autre. On aura les formules suivantes pour passer des axes fixes aux axes liés au cône mobile

$$x' = x'_1, \qquad y' = y'_1, \qquad z' = z'_1,$$

ou bien

$$\begin{aligned}\alpha x + \beta y + \gamma z &= \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1,\\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z &= \alpha'_1 x_1 + \beta'_1 y_1 + \gamma'_1 z_1,\\ \alpha'' x + \beta'' y - \gamma'' z &= \alpha''_1 x_1 + \beta''_1 y_1 + \gamma''_1 z_1.\end{aligned}$$

Remarquons enfin que l'on aura $\nu = \nu_1$, puisque les deux courbes roulent l'une sur l'autre. Si l'on dérive les formules précédentes par rapport au temps, en y regardant x_1, y_1, z_1 comme des constantes, on obtient aisément la formule connue de la vitesse de rotation du corps lié au cône mobile, soit $\omega = \nu(\cot\varphi - \cot\varphi_1)$.

III. Je rappellerai d'abord quelques propriétés fondamentales des surfaces réglées proprement dites.

Soit L une génératrice quelconque. Quand l'on s'éloigne de plus en plus sur la génératrice, le plan tangent est à la limite parallèle à la génératrice infiniment voisine de L. C'est-à-dire que si, par un point, on mène des parallèles aux génératrices de la surface, le plan tangent à l'infini sur une génératrice est parallèle au plan tangent au cône le long de la génératrice correspondante.

Il y a un point A sur la génératrice L pour lequel le plan tangent est perpendiculaire au plan tangent à l'infini sur la génératrice. Ce point est unique, il s'appelle le *point central.* Enfin, si l'on désigne par x la distance d'un point M de la génératrice au point A, distance comptée positivement dans un sens, négativement dans l'autre, par φ l'angle du plan tangent en ce point avec le plan tangent au point central, on a la relation

$$x \cot \varphi = \pi,$$

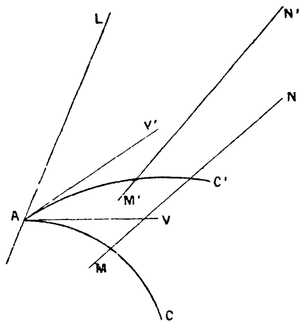
π étant une constante. Elle est positive si, quand on se déplace sur la génératrice dans le sens positif, le plan tangent tourne dans le sens adopté, négative dans le sens contraire. π est en valeur absolue la limite du rapport de la plus courte distance de deux génératrices voisines à leur angle.

On appelle *ligne de striction* le lieu des points centraux sur les génératrices. Soit C cette courbe et s l'arc compté dans un sens à partir d'une origine fixe. Soit aussi le cône formé par les parallèles menées par un point fixe aux directions positives des génératrices et soit la courbe d'intersection de ce cône avec la sphère de rayon égal à l'unité. Soit σ l'arc compté sur cette courbe dans le sens correspondant à celui compté sur la ligne de striction. Soit enfin i l'angle de la tangente dans le sens des arcs croissants à la ligne de striction avec la direction positive sur la génératrice. On a en grandeur

$$\pi = \frac{ds \sin i}{d\sigma}.$$

Soit maintenant un corps solide en mouvement dans le cas général. Considérons la surface lieu des axes instantanés de torsion dans l'espace et dans la position qu'elle occupe à l'époque t, la surface lieu des droites du corps qui coïncident à chaque instant avec l'axe instantané de torsion à cet instant. Ces deux surfaces ont en commun l'axe instantané de torsion AL à l'époque t. Appelons *points correspondants* sur ces deux surfaces deux points qui coïncident à une certaine époque. Soit C une courbe quelconque tracée sur la première surface.

Fig. 5.



Considérons cette courbe comme parcourue par un mobile M qui se trouve à chaque instant sur l'axe instantané de torsion à cet instant. Soit M′ le point correspondant de M.

Ce point M′ décrira sur la seconde surface une courbe C′ et ces deux courbes auront en commun un point A de la génératrice AL. Nous supposerons que l'on compte sur ces courbes les arcs s et s' à partir de points correspondants et dans les sens où les points M et M′ les parcourent par suite du mouvement. Les vitesses v et v' de ces mobiles seront alors positives. Supposons maintenant que les positions M et M′ des mobiles correspondent à l'époque $t+h$ et soient MN, M'N' les génératrices des deux surfaces passant par M et M'.

Pour amener la surface liée au corps dans la position qu'elle occupe à l'époque $t+h$, on peut d'abord lui faire subir une translation, de façon que tous ses points décrivent des droites égales et parallèles à M'M; puis lui imprimer un mouvement de rotation autour d'une droite passant par M, perpendiculaire à la fois à MN et à M'N', l'angle décrit étant celui de M'N' et de MN; enfin terminer par une rotation d'un angle convenable autour de MN.

Si l'on fait tendre h vers zéro, on voit que la vitesse d'un point quelconque du corps est la somme des trois quantités suivantes : 1° un segment égal à la limite de $\frac{(M'M)}{h}$. Or on a

$$\frac{(M'M)}{h} = \frac{(AM)}{h} - \frac{(AM')}{h};$$

c'est donc le segment V'V joignant les extrémités des vitesses des deux mobiles en A; 2° la vitesse du point dans un mouvement de rotation autour d'un axe passant par A et perpendiculaire à AL; 3° la vitesse du point dans un mouvement de rotation autour de AL. On en déduit que la vitesse du mouvement de rotation autour de l'axe perpendiculaire à AL doit être nulle et que la vitesse $v'v$ doit être parallèle à AL. Considérons d'abord la seconde condition. Elle fait voir que les plans tangents en A aux deux surfaces coïncident et, comme le point A est un point quelconque de la génératrice, on voit que les deux surfaces réglées auront même plan tangent tout le long de cette génératrice. Il en résulte d'abord que si l'une des surfaces est réglée proprement dite, l'autre le sera aussi et que, si l'une est développable, l'autre le sera aussi.

Considérons d'abord le cas où les deux surfaces sont réglées proprement dites. Nous affecterons de l'indice prime les quantités relatives à la seconde.

Sur les génératrices destinées à coïncider, les points centraux sont des points correspondants et les paramètres sont égaux et de même signe. Faisons coïncider les lignes de striction avec les courbes C et C'; la condition que VV' doit être parallèle à AL donne

$$v \sin i = v' \sin i',$$

ou bien

$$ds \sin i = ds' \sin i'.$$

Je dis que la vitesse de rotation autour de l'axe perpendiculaire à AL est alors nulle; cette vitesse est la limite du rapport de l'angle de MN et de M'N' à l'intervalle de temps h. Or ces deux génératrices sont à la limite dans le plan commun perpendiculaire au plan central passant par AL et, comme les paramètres sont de même signe, MN et M'N' viennent dans le même demi-plan. Les paramètres étant égaux, on a

$$\frac{ds \sin i}{d\sigma} = \frac{ds' \sin i'}{d\sigma'}.$$

Les numérateurs étant égaux, on aura

$$d\sigma = d\sigma'.$$

Or l'angle de MN et de M'N' est en valeur absolue l'infiniment petit $d\sigma - d\sigma'$, ce qui démontre la proposition.

Ainsi donc, pour que deux surfaces puissent être l'une, le lieu des axes de torsion dans l'espace, l'autre le lieu des axes de torsion dans le corps, il faut et il suffit que si l'on considère les lignes de striction et que l'on désigne par s et s' les arcs correspondant à des génératrices de même paramètre, on ait

$$ds \sin i = ds' \sin i'.$$

Les deux surfaces ne sont donc pas arbitraires.

Dans le cas particulier où, pour l'une des surfaces, le paramètre est le même pour toutes les génératrices, comme cela a lieu pour les hyperboloïdes de révolution à une nappe, il faudra qu'il en soit de même pour l'autre surface et alors la relation précédente détermine les génératrices qui doivent s'appliquer les unes sur les autres.

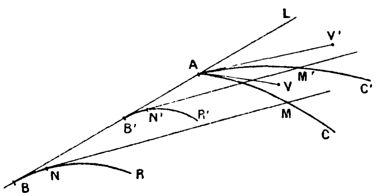
Si nous revenons au cas général, on voit que la vitesse de translation du corps est

$$v \cos i - v' \cos i'.$$

Supposons maintenant que les deux surfaces soient développables et qu'aucune d'elles ne soit un cylindre ou un cône.

Reprenons la *fig.* 5 sur laquelle nous avons représenté en plus les arêtes de rebroussement R et R' des deux surfaces et les points de contact B et B' de ces

Fig. 6.



arêtes de rebroussement avec la génératrice commune AL. Supposons que les points N et N' soient les points de contact des génératrices MN, M'N' avec leurs arêtes de rebroussement. Considérons deux nouveaux mobiles parcourant les courbes R et R' de façon à se trouver constamment le premier en N, le second en N'.

Désignons à l'époque t les vitesses de ces mobiles par v et v'. Considérons les longueurs NM, N'M' comme des fonctions du temps et soient l et l' leurs valeurs BA, B'A à l'époque t. Les quantités v, v', l, l' seront comptées positivement dans la direction AL. Dès lors, la vitesse du point M est, à l'époque t, quand ce point est en A, la résultante de $v + \frac{dl}{dt}$ portée sur la direction AL et de $\frac{lv}{\rho}$ portée sur la normale principale à la courbe R en B, ρ étant le rayon de courbure de cette courbe en B. De même, la vitesse du point M' à l'époque t, quand ce point est en A, est la résultante de $v' + \frac{dl'}{dt}$ portée sur la direction AL et de $\frac{l'v'}{\rho'}$ portée sur la normale principale à la courbe R' en B', ρ' étant le rayon de courbure de cette courbe en B'. Les deux composantes suivant les normales principales sont situées perpendiculairement à AL dans le plan osculateur commun aux deux courbes R et R'; la droite V'V devant être parallèle à AL, on devra avoir

$$\frac{lv}{\rho} = \pm \frac{l'v'}{\rho'}.$$

On doit prendre le signe + si les normales principales sont de même sens, le signe — si elles sont de sens contraire. Comme on peut augmenter l et l' d'une quantité arbitraire, puisque le point A est quelconque sur la génératrice AL, on en déduit que l'on aura séparément

$$l = l', \qquad \frac{v}{\rho} = \pm \frac{v'}{\rho'}.$$

Les deux arêtes de rebroussement sont donc à chaque instant tangentes au même point de la génératrice commune et la relation

$$\frac{ds}{\rho} = \frac{ds'}{\rho'}$$

détermine les points successifs de tangence ; les arcs s et s' sont alors comptés de façon à aller tous deux en croissant ou en décroissant dans le mouvement.

Je dis qu'alors la vitesse de rotation autour de l'axe perpendiculaire à AL est nulle. En effet, les deux droites NM, N'M' sont à la limite dans le plan osculateur commun aux deux courbes. Les angles infiniment petits que les génératrices NM, N'M' font avec AL sont alors les angles de contingence $\frac{ds}{\rho}$ et $\frac{ds'}{\rho'}$, et sont égaux. L'angle infiniment petit de NM et de N'M' est donc nul.

La vitesse de translation du corps à l'époque t est $v - v'$.

Considérons maintenant le cas où l'une des surfaces, la surface mobile par exemple, est un cône. Il n'y aura rien de changé dans la méthode précédente. Seulement la courbe R' n'existe plus, le point N' coïncide toujours avec B', et $\frac{v'}{\rho'}$ doit être remplacé par $\frac{d\alpha'}{dt}$, α' étant l'arc compté sur la courbe d'intersection du cône avec la sphère de rayon égal à l'unité. On voit alors que le sommet du cône doit être constamment sur l'arête de rebroussement de la surface développable et la relation

$$\frac{ds}{\rho} = d\alpha'$$

détermine les génératrices correspondantes sur le cône et sur la surface développable proprement dite. La vitesse de translation du corps est $\frac{ds}{dt}$.

Si la surface fixe était un cône, la surface mobile développable proprement dite, il faudrait que son arête de rebroussement passât constamment par le sommet du cône et l'on aurait la relation

$$d\alpha = \frac{ds'}{\rho'}$$

pour déterminer les génératrices correspondantes sur les deux surfaces. La vitesse de translation du corps est alors $-\frac{ds'}{dt}$.

Si les deux surfaces sont des cônes, on voit qu'ils doivent avoir même sommet et l'on retombe dans le paragraphe II.

Enfin, si l'une des surfaces est un cylindre, on voit, puisque l'angle infiniment petit de NM et de N'M' doit être nul, que la seconde surface est aussi un cylindre. La question est alors la même que celle qui a fait l'objet du paragraphe I, avec cette légère modification que l'on a à y considérer en plus un déplacement parallèlement aux génératrices des cylindres.

Le mouvement du cylindre mobile se composera donc d'un roulement sur le cylindre fixe et d'un glissement parallèlement aux génératrices.

Nous allons maintenant étudier analytiquement le mouvement produit en faisant mouvoir une surface réglée de façon qu'elle touche constamment le long d'une génératrice une surface réglée fixe.

Supposons d'abord que les deux surfaces soient réglées proprement dites. Soient l'une des surfaces, C une courbe tracée sur cette surface; a, b, c les coordonnées d'un point A en fonction de l'arc s; α'', β'', γ'' les cosinus directeurs d'une demi-droite AL passant par A et coïncidant avec la génératrice, exprimés également en fonction de l'arc s.

Les coordonnées d'un point quelconque de la surface peuvent s'écrire

$$x = a + \lambda\alpha'', \qquad y = b + \lambda\beta'', \qquad z = c + \lambda\gamma'',$$

λ étant une arbitraire qui représente la distance d'un point de la génératrice au point A, distance comptée

positivement sur AL, négativement en sens contraire.
L'équation du plan tangent en ce point est

$$\begin{vmatrix} X-a & \frac{da}{ds} & \alpha'' \\ Y-b & \frac{db}{ds} & \beta'' \\ Z-c & \frac{dc}{ds} & \gamma'' \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} X-a & \frac{d\alpha''}{ds} & \alpha'' \\ Y-b & \frac{d\beta''}{ds} & \beta'' \\ Z-c & \frac{d\gamma''}{ds} & \gamma'' \end{vmatrix} = 0.$$

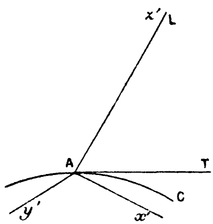
Pour que la courbe C soit la ligne de striction, il faut et il suffit que l'on ait

$$(1) \qquad \frac{da}{ds}\frac{d\alpha''}{ds} + \frac{db}{ds}\frac{d\beta''}{ds} + \frac{dc}{ds}\frac{d\gamma''}{ds} = 0.$$

Nous supposerons désormais cette condition remplie.

Prenons de nouveaux axes liés au mouvement de la génératrice; AL pour axe des z'; soit AT la tangente à

Fig. 7.



la ligne de striction dans le sens des arcs croissants; prenons Ax' dans le plan de AT et de Az' et du même côté de Az' que AT; enfin Ay' sera perpendiculaire au plan $Ax'z'$ de façon que le trièdre $Ax'y'z'$ ait même sens que le trièdre des axes fixes.

Soient

$$x = a + \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z',$$
$$y = b + \beta x' + \beta' y' + \beta'' z',$$
$$z = c + \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z'$$

les formules de transformation. Nous avons déjà désigné par i l'angle de Az' et de AT. On a les relations

$$\alpha \frac{da}{ds} + \beta \frac{db}{ds} + \gamma \frac{dc}{ds} = \sin i,$$

$$\alpha' \frac{da}{ds} + \beta' \frac{db}{ds} + \gamma' \frac{dc}{ds} = 0,$$

$$\alpha'' \frac{da}{ds} + \beta'' \frac{db}{ds} + \gamma'' \frac{dc}{ds} = \cos i.$$

On en tire

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{da}{ds} &= \alpha \sin i + \alpha'' \cos i, \\ \frac{db}{ds} &= \beta \sin i + \beta'' \cos i, \\ \frac{dc}{ds} &= \gamma \sin i + \gamma'' \cos i. \end{aligned} \right.$$

L'équation du plan tangent en un point de la génératrice devient

$$\lambda x' \left(\alpha' \frac{d\alpha''}{ds} + \beta' \frac{d\beta''}{ds} + \gamma' \frac{d\gamma''}{ds} \right) - y' \sin i = 0.$$

Cette équation donne la valeur en grandeur et en signe du paramètre π, soit

$$\alpha' \frac{d\alpha''}{ds} + \beta' \frac{d\beta''}{ds} + \gamma' \frac{d\gamma''}{ds} = \frac{\sin i}{\pi}.$$

En tenant compte de (1) et de (2), on a les équations

$$\alpha \frac{d\alpha''}{ds} + \beta \frac{d\beta''}{ds} + \gamma \frac{d\gamma''}{ds} = 0,$$

$$\alpha' \frac{d\alpha''}{ds} + \beta' \frac{d\beta''}{ds} + \gamma' \frac{d\gamma''}{ds} = \frac{\sin i}{\pi},$$

$$\alpha'' \frac{d\alpha''}{ds} + \beta'' \frac{d\beta''}{ds} + \gamma'' \frac{d\gamma''}{ds} = 0.$$

On en déduit

$$(3) \qquad \frac{d\alpha''}{ds} = \alpha' \frac{\sin i}{\pi}, \qquad \frac{d\beta''}{ds} = \beta' \frac{\sin i}{\pi}, \qquad \frac{d\gamma''}{ds} = \gamma' \frac{\sin i}{\pi}.$$

Cherchons enfin la quantité

$$\alpha' \frac{d\alpha}{ds} + \beta' \frac{d\beta}{ds} + \gamma' \frac{d\gamma}{ds}.$$

Pour cela, remarquons que l'on a

$$\alpha' \frac{d^2 a}{ds^2} + \beta' \frac{d^2 b}{ds^2} + \gamma' \frac{d^2 c}{ds^2} = \frac{\alpha' \cos\xi + \beta' \cos\eta + \gamma' \cos\zeta}{\rho},$$

ξ, η, ζ étant les angles de la normale principale à la courbe C avec les axes fixes, ρ le rayon de courbure de cette courbe; d'après le théorème de Meunier, le second membre est égal à $\frac{1}{R_1}$, R_1 étant le rayon de courbure de la section normale à la surface réglée passant par AT, ce rayon de courbure étant positif ou négatif, selon que le centre de courbure est sur Oy' ou dans la direction opposée. Posons

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\sin^2 i}{R}.$$

On aura

$$\alpha' \frac{d^2 a}{ds^2} + \beta' \frac{d^2 b}{ds^2} + \gamma' \frac{d^2 c}{ds^2} = \frac{\sin^2 i}{R}.$$

On en tire

$$\alpha' \frac{d\alpha}{ds} + \beta' \frac{d\beta}{ds} + \gamma' \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\sin i}{R} - \frac{\cos i}{\pi}.$$

On aura alors les relations

$$\begin{aligned}
\alpha \frac{d\alpha}{ds} + \beta \frac{d\beta}{ds} + \gamma \frac{d\gamma}{ds} &= 0,\\
\alpha' \frac{d\alpha}{ds} + \beta' \frac{d\beta}{ds} + \gamma' \frac{d\gamma}{ds} &= \frac{\sin i}{R} - \frac{\cos i}{\pi},\\
\alpha'' \frac{d\alpha}{ds} + \beta'' \frac{d\beta}{ds} + \gamma'' \frac{d\gamma}{ds} &= 0.
\end{aligned}$$

On en tire

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= \alpha'\left(\frac{\sin i}{R} - \frac{\cos i}{\pi}\right),\\ \frac{d\beta}{ds} &= \beta'\left(\frac{\sin i}{R} - \frac{\cos i}{\pi}\right),\\ \frac{d\gamma}{ds} &= \gamma'\left(\frac{\sin i}{R} - \frac{\cos i}{\pi}\right), \end{aligned}\right.$$

On trouvera de même

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha'}{ds} &= -\alpha\left(\frac{\sin i}{R} - \frac{\cos i}{\pi}\right) - \alpha''\frac{\sin i}{\pi},\\ \frac{d\beta'}{ds} &= -\beta\left(\frac{\sin i}{R} - \frac{\cos i}{\pi}\right) - \beta''\frac{\sin i}{\pi},\\ \frac{d\gamma'}{ds} &= -\gamma\left(\frac{\sin i}{R} - \frac{\cos i}{\pi}\right) - \gamma''\frac{\sin i}{\pi}. \end{aligned}\right.$$

Ces formules établies, supposons que les notations précédentes se rapportent à la surface fixe et désignons celles relatives à la surface mobile par les mêmes lettres affectées de l'indice 1. Remarquons que l'on peut choisir la direction $A_1 z'_1$ et le sens dans lequel on compte l'arc s_1 de la courbe C_1 de façon que dans le mouvement les axes $A\,x'y'z'$ coïncident avec $A_1\,x'_1\,y'_1\,z'_1$ et que π_1 soit égal à π en grandeur et en signe. On aura alors les formules suivantes pour passer des axes fixes aux axes liés à la surface mobile

$$\begin{aligned} x' = x'_1 &= \alpha(x-a) + \beta(y-b) + \gamma(z-c)\\ &= \alpha_1(x_1-a_1) + \beta_1(y_1-b_1) + \gamma_1(z_1-c_1),\\ y' = y'_1 &= \alpha'(x-a) + \beta'(y-b) + \gamma'(z-c)\\ &= \alpha'_1(x_1-a_1) + \beta'_1(y_1-b_1) + \gamma'_1(z_1-c_1),\\ z' = z'_1 &= \alpha''(x-a) + \beta''(y-b) + \gamma''(z-c)\\ &= \alpha''_1(x_1-a_1) + \beta''_1(y_1-b_1) + \gamma''_1(z_1-c_1). \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\frac{ds}{dt} = v, \qquad \frac{ds_1}{dt} = v_1,$$

on trouve, en dérivant par rapport au temps les équations précédentes et désignant par $V_{x'}$, $V_{y'}$, $V_{z'}$ les projections de la vitesse d'un point de la surface mobile sur les axes Ax', Ay', Az', les formules suivantes

$$\begin{aligned}
V_{x'} &- v\sin i + vy'\left(\frac{\sin i}{R} - \frac{\cos i}{\pi}\right) \\
&= - v_1 \sin i_1 + v_1 y'\left(\frac{\sin i_1}{R_1} - \frac{\cos i_1}{\pi}\right), \\
V_{y'} &- \frac{v\sin i}{\pi} z' - vx'\left(\frac{\sin i}{R} - \frac{\cos i}{\pi}\right) \\
&= - \frac{v_1 \sin i_1}{\pi} z' - v_1 x'\left(\frac{\sin i_1}{R_1} - \frac{\cos i_1}{\pi}\right), \\
V_{z'} &- v\cos i + \frac{v\sin i}{\pi} y' = - v_1 \cos i_1 + v_1 \frac{\sin i_1}{\pi} y'.
\end{aligned}$$

Pour que l'on ait un mouvement de torsion autour de l'axe des z', il faut et il suffit que l'on ait

$$v \sin i = v_1 \sin i_1.$$

Considérons maintenant le cas où les deux surfaces sont développables, mais où aucune d'elles n'est ni un cylindre, ni un cône. Soit C l'arête de rebroussement de la surface fixe. Prenons la tangente en un point A dans le sens des arcs croissants pour axe des z', la normale principale pour axe des x' et la perpendiculaire au plan osculateur dans un sens tel que le trièdre $Ax'y'z'$ ait même sens que celui des axes fixes pour axe des y'.

Soient

$$\begin{aligned}
x &= a + \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z', \\
y &= b + \beta x' + \beta' y' + \beta'' z', \\
z &= c + \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z',
\end{aligned}$$

les formules de transformation de coordonnées. On aura, en désignant par ρ le rayon de courbure, par τ le rayon de torsion affecté de signe, les formules suivantes

$$\alpha'' = \frac{da}{ds}, \qquad \beta'' = \frac{db}{ds}, \qquad \gamma'' = \frac{dc}{ds},$$

$$\frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha}{\rho}, \qquad \frac{d\beta''}{ds} = \frac{\beta}{\rho}, \qquad \frac{d\gamma''}{ds} = \frac{\gamma}{\rho},$$

$$\frac{d\alpha'}{ds} = \frac{\alpha}{\tau}, \qquad \frac{d\beta'}{ds} = \frac{\beta}{\tau}, \qquad \frac{d\gamma'}{ds} = \frac{\gamma}{\tau},$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{\alpha'}{\tau} - \frac{\alpha''}{\rho}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = -\frac{\beta'}{\tau} - \frac{\beta''}{\rho}, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = -\frac{\gamma'}{\tau} - \frac{\gamma''}{\rho}.$$

Désignons maintenant les notations relatives à la surface mobile par les mêmes lettres affectées de l'indice 1. Il faut placer la surface mobile sur la surface fixe de façon à faire coïncider les axes des z' et des z'_1 et les plans $Ax'z'$ et $A_1x'_1z'_1$. Nous pouvons supposer que l'on fasse coïncider la direction positive de Az' avec la direction positive de $A_1z'_1$.

On aura alors les formules suivantes pour passer des axes fixes aux axes liés à la surface mobile

$$\begin{aligned}
x' &= \alpha(x-a) + \beta(y-b) + \gamma(z-c) \\
&= \pm[\alpha_1(x_1-a_1) + \beta_1(y_1-b_1) + \gamma_1(z_1-c_1)], \\
y' &= \alpha'(x-a) + \beta'(y-b) + \gamma'(z-c) \\
&= \pm[\alpha'_1(x_1-a_1) + \beta'_1(y_1-b_1) + \gamma'_1(z_1-c_1)], \\
z' &= \alpha''(x-a) + \beta''(y-b) + \gamma''(z-c) \\
&= l + [\alpha''_1(x_1-a_1) + \beta''_1(y_1-b_1) + \gamma''_1(z_1-c_1)],
\end{aligned}$$

l désignant la distance AA_1, les signes $+$ devant être pris si les normales principales sont du même côté de la génératrice, les signes $-$ devant être pris dans le cas contraire.

On en tire, en posant

$$\frac{ds}{dt} = v, \qquad \frac{ds_1}{dt} = v_1,$$

et dérivant par rapport au temps les expressions des projections $V_{x'}$, $V_{y'}$, $V_{z'}$ de la vitesse d'un point sur les axes Ax', Ay', Az'. Ce sont

$$V_{x'} = \frac{v}{\tau} y' + \frac{v}{\rho} z' - \frac{v_1}{\tau_1} y' \mp \frac{v_1}{\rho_1}(z' - l),$$

$$V_{y'} = -\frac{v}{\tau} x' + \frac{v_1}{\tau_1} x',$$

$$V_{z'} = v - \frac{v x'}{\rho} + \frac{dl}{dt} - v_1 \pm \frac{v_1}{\rho_1} x'.$$

Pour que l'on ait un mouvement de torsion autour de l'axe des z', il faut et il suffit que l'on ait

$$l = 0, \qquad \frac{v}{\rho} = \pm \frac{v_1}{\rho_1}.$$

Considérons enfin le cas où l'une des deux surfaces développables est un cône. Nous venons de donner les formules relatives à la surface développable; nous avons donné dans le paragraphe II les formules relatives au cône. Il nous suffira de les réunir.

Les notations relatives au cône seront affectées de l'indice 1. Quand le cône est placé sur la surface développable, on peut toujours supposer que les parties positives des axes Az' et $O_1 z'_1$ coïncident, et que Ax' est parallèle à $O_1 x'_1$ et de même sens.

On a alors pour passer des axes liés à la surface développable à ceux liés au cône les formules

$$\begin{aligned}
x' &= \alpha(x-a) + \beta(y-b) + \gamma(z-c) = \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1,\\
y' &= \alpha'(x-a) + \beta'(y-b) + \gamma'(z-c) = \alpha'_1 x_1 + \beta'_1 y_1 + \gamma'_1 z_1,\\
z' &= \alpha''(x-a) + \beta''(y-b) + \gamma''(z-c) = l + \alpha''_1 x_1 + \beta''_1 y_1 + \gamma''_1 z_1,
\end{aligned}$$

l désignant la distance AO_1.

Si maintenant nous supposons la surface développable fixe, il nous faut regarder x_1, y_1, z_1 comme des constantes en dérivant par rapport au temps et x, y, z comme variables. Si, au contraire, nous supposons le cône fixe, il nous faut regarder x, y, z comme des constantes et x_1, y_1, z_1 comme variables. Les formules obtenues ne différeront qu'en ce que les projections $V_{x'}$, $V_{y'}$, $V_{z'}$ sur Ax', Ay', Az' d'un point de la figure mobile seront dans le second cas dans les seconds membres des formules suivantes

$$V_{x'} - \frac{v y'}{\tau} - \frac{v z'}{\rho} = v_1 \cot \varphi_1 y' - v_1 (z' - l),$$

$$V_{y'} + \frac{v x'}{\tau} = - \cot \varphi_1 v_1 x',$$

$$V_{z'} - v + \frac{v x'}{\rho} = \frac{dl}{dt} + v_1 x',$$

où l'on a

$$\frac{ds}{dt} = v, \qquad \frac{ds_1}{dt} = v_1.$$

Pour que l'on ait un mouvement de torsion autour de l'axe des z', il faut et il suffit que l'on ait

$$l = 0, \qquad \frac{v}{\rho} = v_1.$$

Les formules relatives au mouvement d'un cylindre touchant à chaque instant un cylindre fixe le long d'une génératrice se déduisent trop simplement du paragraphe I pour qu'il y ait lieu d'insister.