NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats d'études supérieures des facultés des sciences. Session de juillet 1899. Compositions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 574-579

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__574_0>

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1899. — COMPOSITIONS.

Caen.

Éléments généraux de Mathématiques.

I. *Les axes coordonnés étant rectangulaires sur la circonférence*

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 = a^2,$$

on considère le point A, *d'abscisse* a, *et un point variable* M, *que l'on joint au point* P, *de coordonnées* 0, 0, $\overline{\mathrm{AM}}$. *Calculer le volume compris entre* OXY *et la surface engendrée par la droite* MP *quant le point* M *parcourt la circonférence; moment d'inertie de ce volume, supposé homogène, autour de* OZ. *Trajectoires orthogonales des génératrices* MP.

II. *Étant donnés trois axes rectangulaires, dont* OZ *est dirigé dans le sens de la pesanteur, on considère la courbe* C.

$$y = 0, \qquad z(a^2 + x^2) = a^3,$$

qui coupe OZ *en* A. *Un tube très étroit, dont l'axe coïncide avec un arc* B′AB *de* C, *peut tourner autour de* OZ; *il renferme une petite masse* m *qui peut y glisser sans frottement. A l'instant initial, le tube tourne autour de* OZ *avec une vitesse* ω, *le point* Xm *est en* A *avec une vitesse* V, *et le système est abandonné à lui-même. Déterminer* ω *et le moment d'inertie* I *du tube* *autour de OZ de sorte que la vitesse de glissement de m dans le tube reste constante.*

I. $$V = \tfrac{4}{3}a^3, \qquad I = \tfrac{2}{5}a^5;$$

projection d'une trajectoire sur OXY :

$$(a-r)^2(1+4\sin^2\tfrac{1}{2}\theta) = C^2.$$

II. r et θ étant les coordonnées polaires de la projection de m sur OXY, si l'on élimine $\frac{d\theta}{dt}$ entre les équations des aires et des forces vives, V disparaît et l'on a

$$\frac{I^2\omega^2}{I+mr^2} - I\omega^2 + \frac{2mgar^2}{a^2+r^2} = 0;$$

pour que cette équation soit vérifiée quel que soit r, il faut

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{a}}, \qquad I = ma^2.$$

Épreuve pratique. — *En un point de l'équateur, on trouve h et h' pour les hauteurs d'une même étoile à deux époques séparées par un intervalle de six heures sidérales : calculer la déclinaison de l'étoile.*

$$\sin^2 D = \cos(h+h')\cos(h-h').$$

Calcul différentiel et intégral.

I. *Définir les systèmes différentiels orthonomes et montrer que la définition est satisfaite par le système*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(1+u)\frac{\partial u}{\partial y} + (1-2u)\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + u^2 + v,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Vérifier que la condition de passivité relative à la dérivée cardinale $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^2 \partial z}$ est identiquement satisfaite : puis, supposant la même vérification faite pour les deux autres conditions de passivité, chercher l'économie des conditions initiales dont la donnée suffit à déterminer une solution ordinaire du système proposé.

II. *Étant donnés trois axes rectangulaires* OX, OY, OZ, *déterminer une surface dont les sections parallèles à* ZOX *soient des lignes de courbure et qui se raccordent avec la surface*

$$x^3 + 2x^2 - y^2 + z^2 - x - 1 = 0,$$

tout le long de sa trace sur le plan YOZ.

II. Une première intégration donne

$$q = \sqrt{1 + p^2}\,\varphi(y) :$$

le long de la courbe proposée, $p = \frac{1}{2\sqrt{1+y^2}}$, $q = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$, donc

$$\varphi(y) = \frac{2y}{\sqrt{4y^2+5}}.$$

On a à intégrer une équation du premier ordre dont l'intégrale est

$$z = C + \tfrac{1}{2}\sqrt{4y^2 + 5 - (1 - 2x)^2} :$$

on trouve que C est nul et que la surface cherchée est un hyperboloïde de révolution.

Épreuve pratique. — *Trouver l'intégrale générale du système*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial x},$$

en prenant pour variables indépendantes

$$x' = a_1 x + b_1 y, \qquad y' = a_2 x + b_2 y$$

et choisissant a_1, b_1, a_2, b_2 *de sorte que la première des équations transformées ne renferme que* $\frac{\partial z}{\partial x'}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'}$, *et la seconde que* $\frac{\partial z}{\partial y'}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y' \partial x'}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2}$.

On peut prendre $a_1 = b_1 = a_2 = 1$, b_2 égal à une racine cubique imaginaire de l'unité, et l'on trouve

$$z = \mathrm{A}\, e^{x+y} + \left(\mathrm{B} \cos \frac{x-y}{2}\sqrt{3} + \mathrm{C} \sin \frac{x-y}{2}\sqrt{3}\right) e^{-\frac{x+y}{2}} + \mathrm{D}.$$

Mécanique.

I. *Sur un cône dont les génératrices font un angle de* 30° *avec l'axe* OZ, *trouver une courbe* C *telle qu'un point de masse* m, *assujetti à rester sur* C *et attiré vers* OZ *par une force égale au produit de* m *par une constante* λ^2 *et par la distance de* m *à* OZ, *arrive en un point déterminé de* C *au bout du temps* $\frac{\pi}{\lambda}$, *quel que soit le point d'où il part sans vitesse initiale. Montrer que* C *est une géodésique du cône.*

II. *Une couche sphérique homogène, soustraite à l'action de toute force extérieure, peut tourner autour d'un de ses points* O, *qui est fixe; à l'instant initial, elle tourne avec une vitesse* ω, *autour d'un axe instantané* OI *qui fait un angle de* 45° *avec le diamètre* OM. *Mouvement ultérieur, pression sur le point* O, *calcul du temps au bout duquel* OM *sera perpendiculaire à sa direction initiale.*

I. On doit avoir sur C :

$$-\lambda^2 u \frac{du}{dS} = -\frac{\pi^2}{4T^2} S = -\frac{\lambda^2 S}{4};$$

on en tire $n = \dfrac{a}{\cos^{\frac{1}{2}} \psi}$, et la relation $\dfrac{u\,d\psi}{dS} = \dfrac{a}{u}$ caractérise une géodésique sur une surface de révolution.

II. L'axe OS du couple des quantités de mouvement, qui est fixe dans l'espace, est situé dans le plan IOM_0, faisant avec OM l'angle θ dont la tangente est $\frac{5}{2}$; les cônes de Poinsot sont de révolution : $\dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{\omega\sqrt{29}}{5\sqrt{2}}$.

Le centre de gravité décrit uniformément un cercle, d'où l'on conclut la charge du point O, égale à

$$M a \psi'^2 \sin\theta = \frac{M a \omega^2 \sqrt{29}}{10}.$$

Enfin le temps au bout duquel OM sera perpendiculaire à sa direction initiale est donné par l'équation

$$\cos \frac{\omega t \sqrt{29}}{5\sqrt{2}} = -\frac{4}{25}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une manivelle* OA, *de* 1^m *de long, tourne uniformément autour de* O *en faisant trois tours par seconde ; elle est articulée à une bielle* AB, *longue de* 2^m, *dont l'extrémité* B *glisse sur une droite* OX. *Calculer la vitesse de* B *quand* AOB *est égal à* 60°.

Le mouvement de la bielle peut s'obtenir en la liant à une courbe qui roulerait sans glisser sur une courbe fixe : déterminer ces deux courbes.

$$V = -\frac{3\pi\sqrt{3}(1+\sqrt{13})}{\sqrt{13}};$$

courbe fixe :

$$y^2 = \frac{x^2(x^2-1)(9-x^2)}{(x^2-3)^2} ;$$

roulante :

$$r = 1 + \frac{3}{1 + 2\cos\theta}.$$