NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. JAMET

Sur le problème d'analyse donné à l'agrégation en 1899

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 553-573

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__553_1>

SUR LE PROBLÈME D'ANALYSE DONNÉ A L'AGRÉGATION EN 1899;

PAR M. V. JAMET (1).

1. Ce problème consistait dans l'étude des intégrales communes aux deux équations :

$$(p-x)(z-c)-(x-a)(px+qy-2z)=0,$$
$$(q-y)(z-c)-(y-b)(px+qy-2z)=0,$$

où l'on désigne, comme d'habitude, par z une fonction des deux variables x, y par p, q ses dérivées partielles, et où l'on fait, successivement, les deux hypothèses suivantes : 1° a, b, c désignent trois constantes données; 2° a, b, c sont trois fonctions d'un même paramètre λ, de telle sorte que si λ varie d'une manière continue, le point, qui a pour coordonnées a, b, c, décrit une courbe C.

Ces équations sont évidemment la traduction du problème suivant :

Trouver une surface telle que si, en un quelconque,

(1) *Voir* le numéro d'août 1899, p. 379.

A, *de ses points, on lui mène un plan tangent* M, *et qu'on joigne le point* A *au pôle* B *du plan* M *par rapport au paraboloïde, dont l'équation est*

$$x^2 + y^2 - 2z = 0,$$

la droite AB *passe sans cesse par le point abc*; *de sorte que, dans la première hypothèse, elle tourne autour d'un point fixe et que, dans la deuxième, elle rencontre sans cesse une courbe donnée.*

En effet, si le point A a pour coordonnées x, y, z et si p, q désignent les dérivées partielles, par rapport à x et y, de la fonction z définie par l'équation de la surface cherchée, les coordonnées du point B seront

$$p, \quad q, \quad px + qy - z,$$

et la droite qui joindra le point (a, b, c) au point A sera représentée par les équations

$$\frac{X - x}{x - a} = \frac{Y - y}{y - b} = \frac{Z - z}{z - c},$$

X, Y, Z étant les coordonnées courantes.

Pour que le point B soit sur cette droite, il faudra qu'on ait constamment

$$\frac{p - x}{x - a} = \frac{q - y}{y - b} = \frac{px + qy - 2z}{z - c},$$

et ces équations sont équivalentes aux équations (1).

Je me propose de généraliser le problème en remplaçant le paraboloïde qui figure dans l'énoncé précédent par une quadrique quelconque.

2. Soit $f(x, y, z, t) = 0$ l'équation de cette quadrique en coordonnées homogènes : nous remplacerons aussi les coordonnées cartésiennes du point a, b, c, par des

coordonnées homogènes a, b, c, d, de sorte que, si les coordonnées cartésiennes du point A sont x, y, z, le plan tangent en ce point à la surface cherchée sera représenté par l'équation

$$p(\mathrm{X}-x)+q(\mathrm{Y}-y)-(\mathrm{Z}-z)=0,$$

où p, q ont la signification habituelle, X, Y, Z désignant les coordonnées courantes; mais les coordonnées homogènes du point B devant être égales, par exemple, à

$$\mu a+\nu x,\quad \mu b+\nu y,\quad \mu c+\nu z,\quad \mu d+\nu,$$

cette même équation doit être identique à la suivante :

$$\left\{\begin{aligned} &[\mu f'_a(a,b,c,d)+\nu f'_x(x,y,z,t)]\mathrm{X}\\ +&[\mu f'_b(a,b,c,d)+\nu f'_y(x,y,z,t)]\mathrm{Y}\\ +&[\mu f'_c(a,b,c,d)+\nu f'_z(x,y,z,t)]\mathrm{Z}\\ +&\ \mu f'_d(a,b,c,d)+\nu f'_t(x,y,z,t) \end{aligned}\right\}=0,$$

où l'on a fait $t=1$. Nous désignerons désormais les dérivées de $f(x,y,z,t)$ qui figurent dans cette équation par f'_x, f'_y, f'_z, f'_t; les dérivées de $f(a,b,c,d)$ par f'_a, f'_b, f'_c, f'_d.

En identifiant ces deux dernières équations, nous trouverons

$$\frac{\mu f'_a+\nu f'_x}{p}=\frac{\mu f'_b+\nu f'_y}{q}=\frac{\mu f'_c+\nu f'_z}{-1}=\frac{\mu f'_d-\nu f'_t}{-(px+qy-z)};$$

l'élimination de μ et de ν entre ces trois dernières équations donne les deux équations de condition suivantes :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\begin{vmatrix} f'_a & f'_x & p\\ f'_c & f'_z & -1\\ f'_d & f'_t & -(px+qy-z)\end{vmatrix}=0,\\ &\begin{vmatrix} f'_b & f'_y & q\\ f'_c & f'_z & -1\\ f'_d & f'_t & -(px+qy-z)\end{vmatrix}=0.\end{aligned}\right.$$

et nous aurons à chercher les intégrales communes à ces deux équations, dans les deux hypothèses énoncées au début, concernant le point (a, b, c, d).

3. Examinons d'abord le cas où a, b, c, d sont des constantes ; désignons par H la quadrique donnée, par S le point dont les coordonnées homogènes sont a, b, c, d, par P son plan polaire par rapport à H, et considérons une quadrique Σ tangente à H en tous les points communs à H et à P. En un point A pris sur Σ, menons le plan tangent à cette surface, et soit M ce plan. Les deux plans M et P se coupent suivant une droite D ayant même polaire réciproque par rapport aux deux quadriques H et Σ. En effet, la polaire réciproque de D, soit par rapport à H, soit par rapport à Σ, doit passer par le point S et par le pôle C de la droite D, par rapport à la conique de contact des deux surfaces H et Σ. D'ailleurs cette polaire réciproque passe évidemment par le point A et aussi par le pôle du plan M, par rapport à la quadrique H, car le plan M contient la droite D.

4. Donc toute surface Σ est une des surfaces que nous cherchons. L'équation générale de ces surfaces est

$$(3) \qquad (xf'_a + yf'_b + zf'_c + tf'_d)^2 + kf(x, y, z, t) = 0,$$

k désignant un paramètre arbitraire. Mais les équations (2) ont été établies en supposant $t = 1$; faisons donc ici $t = 1$ et proposons-nous de démontrer que toute intégrale commune aux équations (2) est définie par une équation de la forme (3). A cet effet, écrivons les équations (2) sous la forme

$$(4) \qquad \frac{f'_x + pf'_z}{f'_a + pf'_c} = \frac{f'_y + qf'_z}{f'_b + qf'_c} = \frac{(px + qy - z)f'_z - f'_t}{(px + qy - z)f_c - f'_d},$$

qu'on trouve aisément en transformant les déterminants qui figurent dans les équations (2). Observons ensuite que chacun des rapports écrits dans ces dernières proportions doit être égal au rapport suivant :

$$\frac{-xf'_x - yf'_y - zf'_z - f'_t}{-xf'_a - yf'_b - zf'_c - f'_d}$$

ou bien

$$\frac{2f(x, y, z, 1)}{xf'_a + yf'_b + zf'_c + f'_d},$$

en vertu d'une propriété des proportions bien connue. Donc les équations (4) et, par conséquent, les équations (2) sont équivalentes à celles-ci :

$$(5)\qquad \frac{f'_x + pf'_z}{f'_a + pf'_c} = \frac{f'_y + qf'_z}{f'_b + qf'_c} = \frac{2f(x, y, z, 1)}{xf'_a + yf'_b + zf'_c + f'_d}$$

qui sont, elles mêmes, équivalentes à

$$(xf'_a + yf'_b + zf'_c + f'_d)\frac{f'_x + pf'_y}{2\sqrt{f(x, y, z, 1)}} - \sqrt{f(x, y, z, 1)}\,(f'_a + pf'_c) = 0,$$

$$(xf'_a + yf'_b + zf'_c + f'_d)\frac{f'_y + qf'_z}{2\sqrt{f(x, y, z, 1)}} - \sqrt{f(x, y, z, 1)}\,(f'_b + qf'_c) = 0.$$

Soit $\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial x}$ la dérivée de la fonction φ par rapport à x, calculée en regardant z comme une fonction des deux variables x et y; soit $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ sa dérivée analogue par rapport à y. En divisant le premier membre de chacune des équations précédentes par $-f(x, y, z, 1)$ et en attribuant aux signes $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ le sens que nous venons de préciser, on trouve

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xf'_a + yf'_b + zf'_c + f'_d}{\sqrt{f(x, y, z, 1)}}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xf'_a + yf'_b + zf'_c - f'_d}{\sqrt{f(x, y, z, 1)}}\right) = 0.$$

et ces deux conditions ne sont remplies que si le rapport

$$\frac{xf'_a + yf'_b + zf'_c + f'_d}{\sqrt{f(x, y, z, 1)}}$$

est constant. Désignant ce rapport constant par $\sqrt{-k}$, nous trouvons que toute fonction z, assujettie à vérifier les équations (2), est définie par une équation identique à l'équation (3), où l'on a fait $t = 1$.

5. Passons maintenant à la deuxième hypothèse. Supposant que a, b, c, d sont des fonctions données d'un paramètre λ, on éliminera ce paramètre entre les équations (2); on obtiendra de la sorte une équation aux dérivées partielles

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

dont l'intégrale générale doit dépendre d'une fonction arbitraire. On aura donc trouvé cette intégrale générale si l'on sait former une fonction z de x et de y vérifiant les équations (2), ou bien les équations équivalentes

$$(5) \quad \frac{f'_x + pf'_z}{f'_a + pf'_c} = \frac{f'_y + qf'_z}{f'_b + qf'_c} = \frac{2f(x, y, z, 1)}{xf'_a + yf'_b + zf'_c + f'_d},$$

pourvu que la formation de cette fonction z comporte l'emploi d'une fonction arbitraire. Or, si l'on désigne par k une fonction arbitraire de λ, par k' sa dérivée, par a', b', c', d' les dérivées de a, b, c, d par rapport à λ, les deux équations ci-dessus seront vérifiées quand on regardera z et λ comme deux fonctions de x et de y, définies par les deux équations suivantes

$$(6) \begin{cases} (xf'_a + yf'_b + zf'_c + f'_d)^2 = k^2 f(x, y, z, 1), \\ (xf'_a + yf'_b + zf'_c + f'_d)(xf'_{a'} + yf'_{b'} + zf'_{c'} + f'_{d'}) \\ \quad = kk' f(x, y, z, 1). \end{cases}$$

En effet, en différentiant la première de ces équations, successivement, par rapport à x et par rapport à y, et, en tenant compte de la deuxième, on trouve

$$2(xf'_a+yf'_b+zf'_c+f'_d)(f'_a+pf'_c)=k^2(f'_x+pf'_z),$$
$$2(xf'_a+yf'_b+zf'_c+f'_d)(f'_b+qf'_c)=k^2(f'_y+qf'_z),$$

et, par conséquent,

$$\frac{f'_x+pf'_z}{f'_a+pf'_c}=\frac{f'_y+qf'_z}{f'_b+qf'_c}=\frac{2(xf'_a+yf'_b+zf'_c+f'_d)}{k^2}.$$

Mais, en vertu de la première équation (c), ce dernier rapport est égal à

$$\frac{2f(x,y,z,1)}{xf'_a+yf'_b+zf'_c+f'_d},$$

de sorte que la fonction z définie par les équations (6) vérifie les équations (5).

6. La deuxième des équations (6) a été obtenue en égalant entre elles les dérivées des deux membres de la première par rapport à λ. La surface intégrale définie par ces deux équations est donc la surface enveloppe des quadriques définies par la première des équations (6), où l'on regarde λ comme un paramètre arbitraire. Chacune de ces quadriques touche la surface enveloppe suivant une courbe définie par les équations (6), et si l'on eût traité l'équation

$$F(x,y,z,p,q)=0$$

par la méthode des caractéristiques, ce sont évidemment de telles courbes que l'on eût trouvées comme caractéristiques. Je dis qu'une telle courbe est une conique. En effet, le système des équations (6) est équivalent au système formé par la première d'entre elles, jointe à la suivante :

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} k'(xf'_a+yf'_b+zf'_c+f'_d) \\ \quad -k(xf'_{a'}+yf'_{b'}+zf'_{c'}+f'_{d'})=0, \end{array}\right.$$

qu'on obtient en divisant membre à membre les équations (6), et en chassant les dénominateurs.

Si λ est constante, cette dernière équation représente un plan. Donc, sur chacune des surfaces intégrales trouvées, les caractéristiques sont des coniques. Chacune d'elles répond à une valeur de λ, ou à une position du point (a, b, c, d) sur la courbe C qu'il décrit; soit S la position qui répond à une valeur donnée de λ, P le plan polaire du point S par rapport à la quadrique donnée. Quand le point S décrit la courbe C, le plan P enveloppe une certaine développable, et, à chaque position du point S sur C, répond une génératrice G de cette développable. D'après l'équation que nous venons de trouver, le plan de la caractéristique passe sans cesse par cette génératrice.

Soient D, E les deux points où la droite G coupe la quadrique donnée, et par suite aussi la conique, intersection de cette quadrique avec le plan P. En un tel point, la quadrique représentée, par la première des équations (6), a le même plan tangent que la quadrique donnée, et chacun de ces deux plans tangents contiendra la tangente à la caractéristique, au point de contact correspondant. Si donc une quadrique T contient la caractéristique définie par les équations (6) et si, en chacun des deux points D, E, son plan tangent contient une droite tangente, au même point, à la quadrique donnée, mais non tangente à la caractéristique, la quadrique donnée et la quadrique T auront, aux deux points D, E, les mêmes plans tangents et, par conséquent, se couperont suivant deux courbes planes. A la fin de ce

Travail, nous aurons l'occasion d'appliquer cette remarque.

7. Pour le moment, supposons qu'on nous donne les fonctions a, b, c, d, ou, ce qui est la même chose, la courbe C, et proposons-nous de déterminer la fonction k de telle sorte que le plan de la caractéristique de la surface intégrale trouvée passe par un point fixe. Soient α, β, γ, δ les coordonnées homogènes de ce point; il suffit évidemment, en vertu de l'équation (7), que l'on ait

$$\begin{aligned} & k'(\alpha f'_a + \beta f'_b + \gamma f'_c + \delta f'_d) \\ & \quad - k(\alpha f'_{a'} + \beta f'_{b'} + \gamma f'_{c'} + \delta f'_{d'}) = 0, \end{aligned}$$

ou bien, d'après une propriété des formes quadratiques,

$$\begin{aligned} & k'(a f'_\alpha + b f'_\beta + c f'_\gamma + d f'_\delta) \\ & \quad - k(a' f'_\alpha + b' f'_\beta + c' f'_\gamma + d' f'_\delta) = 0, \end{aligned}$$

ou bien encore

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{k}{a f'_\alpha + b f'_\beta + c f'_\gamma + d f'_\delta}\right) = 0,$$

ou enfin, en désignant par m une constante,

$$k = m(a f'_\alpha + b f'_\beta + c f'_\gamma + d f'_\delta).$$

On observera que, pour une même valeur de λ, c'est-à-dire pour une même position du point S sur la courbe C, le plan de la caractéristique est toujours le même quel que soit m. Donc, *sur toutes les surfaces intégrales dont les caractéristiques sont dans des plans passant par un point donné, les caractéristiques répondant à une même position du point* S *sont dans un même plan.* En se reportant à la première des équations (6), on voit que toutes ces caractéristiques sont les intersections de ce plan avec les quadriques circonscrites à la quadrique donnée, suivant la courbe d'intersection de celle-ci avec le plan polaire du point S. Toutes ces coniques caractéristiques ont deux points communs, savoir les deux points que nous avons appelés D, E (n° 6); en ces deux points, elles ont les mêmes tangentes, savoir les intersections de leur plan avec les plans tangents en D, E à la quadrique donnée.

8. Revenons au cas général. Menons, en tous les points d'une même caractéristique, des plans tangents à la surface intégrale qui la contient; ils sont aussi tangents à une surface du second degré, dont l'équation sera, par exemple, la première des équations (6); et comme la caractéristique est une section plane de cette quadrique, tous ces plans tangents envelopperont un cône circonscrit à la quadrique tout le long de cette caractéristique. Le sommet de ce cône sera, par rapport à la quadrique, le pôle du plan représenté par l'équation (7). Soient ξ, η, ζ, θ les coordonnées homogènes de ce point. Si l'on forme l'équation du plan polaire de ce point et qu'on l'identifie avec l'équation (7), on trouve, pour déterminer ξ, η, ζ, θ, les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\frac{2f'_a(\xi f'_a+\eta f'_b+\zeta f'_c+\theta f'_d)-k^2 f'_\xi}{k' f_a-k f'_a}\\
&=\frac{2f'_b(\xi f'_a+\eta f'_b+\zeta f'_c+\theta f'_d)-k^2 f'_\eta}{k' f_b-k f'_b}\\
&=\frac{2f'_c(\xi f'_a+\eta f'_b+\zeta f'_c+\theta f'_d)-k^2 f'_\zeta}{k' f_c-k f'_c}\\
&=\frac{2f'_d(\xi f'_a+\eta f'_b+\zeta f'_c+\theta f'_d)-k^2 f'_\theta}{k' f_d-k f'_d},
\end{aligned}$$

Ces équations vont nous permettre de rechercher à quelle condition toute caractéristique d'une des surfaces intégrales se compose de deux droites.

Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et suffisant que le point ξ, η, ζ, θ, pôle du plan de la caractéristique, se trouve dans ce plan. Cette dernière condition est, en effet, nécessaire et suffisante pour que le plan de la caractéristique soit sans cesse tangent à la surface (6) et, par conséquent, pour que la caractéristique se décompose en deux droites.

Or on reconnaît aisément que chacun des rapports entrant dans les proportions ci-dessus doit être égal à

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} 2(af'_a+bf'_b+cf'_c+df'_d)(\xi f'_a+\eta f'_b+\zeta f'_c+\theta f'_d) \\ \quad -k^2(af'_\xi+bf'_\eta+cf'_\zeta+df'_\theta) \end{array}\right\}}{k'(af'_a+bf'_b+cf'_c+df'_d)-k(af'_{a'}+bf'_{b'}+cf'_{c'}+df'_{d'})},$$

c'est-à-dire à

$$\text{(A)}\qquad \frac{[4f(a,b,c,d)-k^2](\xi f'_a+\eta f'_b+\zeta f'_c+\theta f'_d)}{2k'f(a,b,c,d)-k(af'_{a'}+bf'_{b'}+cf'_{c'}+df'_{d'})}.$$

D'autre part, ces rapports sont égaux au suivant :

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} 2(a'f'_a+b'f'_b+c'f'_c+d'f'_d)(\xi f'_a+\eta f'_b+\zeta f'_c+\theta f'_d) \\ \quad -k^2(a'f'_\xi+b'f'_\eta+c'f'_\zeta+d'f'_\theta) \end{array}\right\}}{k'(a'f'_a+b'f'_b+c'f'_c+df'_d)-2kf(a',b',c',d')}.$$

Mais, si le point $(\xi, \eta, \zeta, \theta)$ est dans le plan de la caractéristique, c'est-à-dire si l'on a

$$k'(\xi f'_a+\eta f'_b+\zeta f'_c+\theta f'_d) = k(\xi f'_{a'}+\eta f'_{b'}+\zeta f'_{c'}+\theta f'_{d'}).$$

Ce dernier rapport sera égal à

$$\text{(B)}\qquad \frac{[2(a'f'_a+b'f'_b+c'f'_c+d'f'_d)-kk'](\xi f'_a+\eta f'_b+\zeta f'_c+\theta_d')}{k'(a'f'_a+b'f'_b+c'f'_c+d'f'_d)-2kf(a',b',c',d')}.$$

En comparant entre eux les deux rapports (A) et (B), on trouve la condition

$$\frac{4f(a,b,c,d)-k^2}{2k'f(a,b,c,d)-k(a'f'_a+b'f'_b+c'f'_c+d'f'_d)} = \frac{2(a'f'_a+b'f'_b+c'f'_c+d'f'_d)-kk'}{k'(a'f'_a+b'f'_b+c'f'_c+d'f'_d)-2kf(a',b',c',d')},$$

équivalente à celle-ci

$$\frac{4f(a,b,c,d)-k^2}{kk'-2(a'f'_a+b'f'_b+c'f'_c+d'f'_d)}$$
$$=\frac{2(a'f'_a+b'f'_b+c'f'_c+d'f'_d)-kk'}{k'^2-4f(a',b',c',d')},$$

ou encore à

$$k'^2+\frac{[2(a'f'_a+b'f'_b+c'f'_c+d'f'_d)-kk']^2}{4f(a,b,c,d)-k^2}=4f(a',b',c',d').$$

Regardons cette dernière équation comme une équation différentielle où la fonction inconnue est k et où les fonctions a, b, c, d sont données. Nous pourrons l'intégrer en posant

$$(8)\qquad \sqrt{4f(a,b,c,d)-k^2}=2\cos\varphi\sqrt{f(a,b,c,d)}$$

et, par conséquent,

$$(9)\qquad k=2\sqrt{f(a,b,c,d)}\sin\varphi,$$

En effet, si l'on fait

$$\sqrt{4f(a,b,c,d)-k^2}=h,$$

le premier membre de l'équation à intégrer sera égal à

$$\left(\frac{dk}{d\lambda}\right)^2+\left(\frac{dh}{d\lambda}\right)^2,$$

et se réduira, en vertu des formules (8) et (9), à

$$4f(a,b,c,d)\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2+4\left[\frac{d\sqrt{f(a,b,c,d)}}{d\lambda}\right]^2.$$

On trouvera donc

$$f(a,b,c,d)\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2+\left[D_\lambda\sqrt{f(a,b,c,d)}\right]^2=f(a',b',c',d),$$

$$\varphi=\int_{\lambda_0}^{\lambda}\sqrt{\frac{f(a',b',c',d')-[D_\lambda f(a,b,c,d)]^2}{f(a,b,c,d)}}\,d\lambda$$

ou bien

$$\varphi = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{4f(a,b,c,d)f(a',b',c',d') - (a'f'_a + b'f'_b + c'f'_c + d'f'_d)^2}}{2f(a,b,c,d)} d\lambda,$$

λ_0 étant arbitraire.

On en conclura

$$k = 2\sqrt{f(a,b,c,d)} \times \sin \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{4f(a,b,c,d)f(a',b',c',d') - (a'f'_a + b'f'_b + c'f'_c + d'f'_d)^2}}{2f(a,b,c,d)} d\lambda.$$

9. Parmi les diverses déterminations qu'on peut assigner à la fonction k, notons, en passant, celle qui résulte de l'équation

$$k^2 = 4f(a,b,c,d).$$

L'équation générale des quadriques enveloppées par une des surfaces intégrales cherchées représente alors les surfaces coniques circonscrites à la quadrique donnée, et dont les sommets sont les points de la courbe donnée C. La surface intégrale correspondante sera tangente à la quadrique donnée, suivant une courbe F, intersection de la quadrique donnée avec la surface développable, dont les plans tangents sont les plans polaires des points de la courbe C par rapport à la quadrique donnée. Sur chaque génératrice G de cette développable et sur la courbe F, se trouveront deux points D, E, appartenant à l'une des surfaces coniques qui nous occupent actuellement. Tout cela résulte des développements qui terminent le n° 6, et s'étend aisément aux surfaces trouvées dans le cas général.

10. L'équation des surfaces coniques définies ci-dessus, savoir

$$(xf'_a + yf'_b + zf'_c + f'_d)^2 - 4f(a,b,c,d)f(x,y,z,1) = 0,$$

va nous permettre de trouver l'équation du cône ayant pour sommet un point (a, b, c, d) de la courbe C et pour base la courbe définie par les équations (6), c'est-à-dire une caractéristique d'une des surfaces intégrales trouvées, savoir celle qui répond à la position (a, b, c, d) du point S.

Nous rechercherons ensuite s'il y a, sur ce cône, des coniques qu'on puisse considérer, chacune, comme la caractéristique d'une autre surface intégrale, ces diverses surfaces répondant à d'autres déterminations de la fonction k.

Observons d'abord que l'équation générale des surfaces coniques du second degré, tangentes au cône représenté par l'équation ci-dessus, suivant les génératrices passant par les points que nous avons appelés D, E, sera, en désignant par ω un paramètre arbitraire,

$$\tag{9} \left\{ \begin{aligned} &(xf'_a + yf'_b - zf'_c + f'_d)^2 - 4f(a, b, c, d)\,f(x, y, z, 1) \\ &\quad + \omega[(a'f'_a + b'f'_b - c'f'_c + d'f'_d)(xf_a + yf'_b + zf'_c + f'_d) \\ &\qquad\qquad - 2f(a, b, c, d)(xf'_a + yf'_{b'} + zf'_{c'} + f'_{d'})]^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

En effet, en égalant à zéro le facteur entre crochets écrit sur la deuxième ligne de cette équation, on trouverait l'équation du plan passant par les deux droites SD, SE. Il restera maintenant à choisir ω de telle sorte que, sur cette surface, se trouve la courbe définie par les équations (6). Mais, pour abréger l'écriture, nous poserons

$$f(a, b, c, d) = A;$$

nous observerons que l'expression

$$a'f'_a + b'f'_b + c'f'_c + d'f'_d,$$

identique à

$$af'_{a'} + bf'_{b'} + cf'_{c'} + df'_{d'},$$

est la dérivée de A par rapport à λ, et nous la désignerons par A'. Nous poserons aussi

$$xf'_a + yf'_b + zf'_c + f'_d \equiv (af'_x + bf'_y + cf'_z + df'_t)_{t=1} = P,$$
$$xf'_{a'} + yf'_{b'} + zf'_{c'} + f'_{d'} \equiv (a'f'_x + b'f'_y + c'f'_z + d'f'_t)_{t=1} = P',$$

et nous observerons que P' est la dérivée de P par rapport à λ.

Alors les équations d'une caractéristique seront

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} P^2 - k^2 f(x, y, z, 1) &= 0,\\ k'P - kP' &= 0.\end{aligned}\right.$$

L'équation (10) deviendra

$$P^2 - 4Af(x, y, z, 1) + \omega(A'P - 2AP')^2 = 0,$$

et, pour que la surface représentée par cette dernière équation renferme la courbe représentée par les deux équations qui précèdent, il faut qu'on ait

$$k^2 - 4A + \omega(A'k - 2Ak')^2 = 0:$$

cette dernière condition résulte, en effet, de l'élimination de f et de P' entre les trois équations ci-dessus. Voici donc l'équation du cône ayant pour sommet le point (a, b, c, d) et pour base la courbe définie par les équations (11) :

$$\frac{P^2 - 4f(x, y, z, 1)}{k^2 - 4A} = \frac{(A'P - 2AP')^2}{(A'k - 2Ak')^2}.$$

11. Considérons une autre surface intégrale, par exemple celle qu'on obtient en remplaçant la fonction k par une autre fonction h de la variable λ. Au point S, (a, b, c, d) considéré précédemment, répond, sur cette surface, une certaine caractéristique, située sur un cône ayant pour équation

$$\frac{P^2 - 4f(x, y, z, 1)}{h^2 - 4A} = \frac{(A'P - 2AP')^2}{(A'h - 2Ah')^2},$$

et pour que ce cône coïncide avec celui dont nous venons d'établir l'équation, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\frac{h^2-4A}{k^2-4A}=\frac{(A'h-2Ah')^2}{(A'k-2Ak')^2}.$$

Ceci exige qu'il y ait, entre h et k, une relation en termes finis que nous allons établir.

A cet effet, posons

$$h=2\sqrt{A}\,h_1,$$
$$k=2\sqrt{A}\,k_1;$$

l'équation précédente deviendra

$$\frac{h_1^2-1}{k_1^2-1}=\frac{h_1'^2}{k_1'^2},$$

d'où l'on conclut

$$(12)\qquad \frac{h_1'}{\sqrt{h_1^2-1}}\pm\frac{k_1'}{\sqrt{k_1^2-1}}=0,$$

puis, en intégrant et désignant par α une constante arbitraire,

$$\log(h_1+\sqrt{h_1^2-1})\pm\log(k_1+\sqrt{k_1^2-1})=\log\alpha.$$

Si l'on suppose le deuxième logarithme précédé du signe $+$, on trouve

$$h_1+\sqrt{h_1^2-1}=\frac{\alpha}{k_1+\sqrt{k_1^2-1}}$$

ou bien

$$h_1+\sqrt{h_1^2-1}=\alpha(k_1-\sqrt{k_1^2-1}),$$

équation équivalente à

$$h_1-\sqrt{h_1^2-1}=\frac{1}{\alpha}(k_1+\sqrt{k_1^2-1}),$$

d'où l'on conclut

$$h_1=\frac{1}{2}\left[\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)k_1-\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\sqrt{k_1^2-1}\right]$$

et, en posant

$$\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = m,$$

$$(13) \qquad \begin{cases} h_1 = mk_1 - \sqrt{(1-m^2)(1-k_1^2)} \\ = mk_1 - \sqrt{(m^2-1)(k_1^2-1)}. \end{cases}$$

En supposant le deuxième radical précédé du signe —, nous eussions trouvé

$$h_1 = mk_1 + \sqrt{(1-m^2)(1-k_1^2)},$$

et l'on aurait pu réunir ces deux dernières formules en une seule, savoir

$$h_1 = k_1 \cos\beta + \sin\beta\sqrt{1-k_1^2},$$

β désignant une constante arbitraire. C'est aussi ce qui résulte de la forme suivante :

$$\text{arc}\sin h_1 \pm \text{arc}\sin k_1 = \beta',$$

qu'on peut donner à l'intégrale générale de l'équation (12), en supposant que β' désigne une constante arbitraire.

Mais nous avons tenu à exposer en détail le calcul conduisant à l'équation (13), à cause des conséquences que celle-ci entraîne immédiatement.

12. La surface conique définie au n° **10** et représentée par l'équation

$$\frac{P^2 - 4f(x, y, z, 1)}{k^2 - 4A} = \frac{(A'P - 2AP')^2}{(A'k - 2Ak')^2},$$

a, avec la quadrique donnée, deux points communs où les plans tangents aux deux surfaces sont les mêmes. Ce sont les points désignés antérieurement par D, E. Donc ces deux surfaces se coupent suivant deux courbes planes, et l'on voit immédiatement que les plans de ces deux courbes sont représentés par l'équation

$$\frac{P^2}{k^2 - 4A} = \frac{(A'P - 2AP')^2}{(A'k - 2Ak')^2}.$$

Donc l'un deux a pour équation

$$(A'k - 2Ak' - \sqrt{k^2 - 4A}\,A')P + 2A\sqrt{k^2 - 4A}\,P' = 0;$$

nous le désignons par U.

L'autre est représenté par l'équation

$$(A'k - 2Ak' + \sqrt{k^2 - 4A}\,A')P - 2A\sqrt{k^2 - 4A}\,P' = 0.$$

Nous le désignerons par V.

Considérons aussi les plans des caractéristiques de deux surfaces intégrales répondant aux fonctions k et h étudiées au n° **11** ; l'un d'eux est représenté par l'équation

$$k'P - kP' = 0,$$

l'autre par l'équation

$$h'P - hP' = 0.$$

Ces quatre plans passent par une même droite ayan pour équations

$$P = 0, \qquad P' = 0;$$

c'est la droite DE, désignée aussi par G. Cherchons le rapport anharmonique de ces quatre plans. A cet effet, supposons qu'on ait écrit l'équation du plan U sous la forme

$$\mu P + \nu P' = 0,$$

et calculons la différence

$$-\frac{\mu}{\nu} - \frac{h'}{h}.$$

Nous trouvons d'abord

$$-\frac{\mu}{\nu}=\frac{A'k-2Ak'-A'\sqrt{k^2-4A}}{2A\sqrt{k^2-4A}},$$

et si l'on fait, comme précédemment,

$$k=2\sqrt{A}\,k_1,$$

on trouve

$$-\frac{\mu}{\nu}=\frac{-k'_1}{\sqrt{k_1^2-1}}+\frac{A'}{2A},$$

puis, à cause de la relation (13),

$$\frac{h'}{h}=\frac{h'_1}{h_1}+\frac{A'}{2A}=\frac{m\sqrt{k_1^2-1}-\sqrt{m^2-1}\,k_1}{mk_1-\sqrt{(m^2-1)(k_1^2-1)}}\,\frac{k'_1}{\sqrt{k_1^2-1}}+\frac{A'}{2A},$$

puis encore

$$-\frac{\mu}{\nu}-\frac{h'}{h}=-\frac{k'_1}{\sqrt{k_1^2-1}}\,\frac{(m-\sqrt{m^2-1})(k_1+\sqrt{k_1^2-1})}{mk_1-\sqrt{(m^2-1)(k_1^2-1)}}.$$

De même, si l'on écrivait l'équation du plan V sous la forme

$$\mu'P+\nu'P'=0,$$

on trouverait, par un calcul analogue,

$$-\frac{\mu'}{\nu'}-\frac{h'}{h}=\frac{k'_1}{\sqrt{k_1^2-1}}\,\frac{(m+\sqrt{m^2-1})(k_1-\sqrt{k_1^2-1})}{mk_1-\sqrt{(m^2-1)(k_1^2-1)}},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\dfrac{\mu}{\nu}-\dfrac{h'}{h}}{\dfrac{\mu'}{\nu'}-\dfrac{h'}{h}}=-\frac{m-\sqrt{m^2-1}}{m+\sqrt{m^2-1}}\,\frac{k_1+\sqrt{k_1^2-1}}{k_1-\sqrt{k_1^2-1}}.$$

On trouvera le rapport anharmonique cherché en divisant le second membre de cette dernière égalité par l'expression de

$$\frac{\dfrac{\mu}{\nu}-\dfrac{k'}{k}}{\dfrac{\mu'}{\nu'}-\dfrac{k'}{k}}$$

en fonction de λ. Or cette expression ne peut différer de

$$\frac{\frac{\mu}{\nu} - \frac{h'}{h}}{\frac{\mu'}{\nu'} - \frac{h'}{h}}$$

que par le changement de m en $+1$. Car, pour $m = 1$, on trouve

$$h_1 = k_1.$$

Donc l'expression que nous cherchons actuellement est

$$\frac{k_1 + \sqrt{k_1^2 - 1}}{k_1 - \sqrt{k_1^2 - 1}},$$

et le rapport anharmonique des quatre plans considérés est

$$\frac{m - \sqrt{m^2 - 1}}{m + \sqrt{m^2 - 1}}.$$

Ceci nous montre que, d'une des surfaces intégrales trouvées, on peut en déduire une infinité d'autres comme il suit. Soit A un point situé sur une première surface intégrale, B le pôle de son plan tangent en A par rapport à la quadrique donnée. La droite AB passe, comme on sait, par un point S situé sur la courbe C; c'est donc une génératrice du cône ayant pour sommet S et pour base la caractéristique tracée par le point A sur la surface considérée. Cette droite coupe la quadrique donnée en deux points M, N, situés respectivement sur les deux coniques communes à ce cône et à la quadrique donnée. Soit m un nombre donné et P un point situé sur la droite MN, de telle sorte que le rapport anharmonique

$$(\text{MNAP})$$

soit égal à

$$\frac{m - \sqrt{m^2 - 1}}{m + \sqrt{m^2 - 1}}.$$

Quand le point A décrira une caractéristique de la surface intégrale considérée en premier lieu, le point P décrira une caractéristique d'une deuxième surface intégrale; soient H la première surface, H′ la seconde. Quand la caractéristique sur laquelle se trouve le point A décrira la surface H, la caractéristique lieu du point P décrira la deuxième surface intégrale H′.

Il est, d'ailleurs, bien évident qu'au lieu de se donner le nombre m, on peut se donner arbitrairement le rapport anharmonique constant

$$(\mathrm{MNAP})$$

égal, par exemple à γ, et déterminer m par la condition

$$\frac{m-\sqrt{m^2-1}}{m+\sqrt{m^2-1}}=\gamma:$$

le nombre γ, ainsi choisi, déterminera la surface intégrale H′.

13. D'après la manière dont nous avons établi les équations (2), ou (5), il est évident qu'à toute surface H répondant à la question, répond une surface H″, polaire réciproque de H par rapport à la quadrique donnée. Mais, ici, les deux points A, P se correspondent de telle sorte que le rapport anharmonique

$$(\mathrm{MNAP}) \quad \text{ou} \quad \gamma$$

est égal à -1; ceci exige qu'on ait

$$m=0.$$

Alors l'équation (13) devient

$$h_1=\sqrt{1-k_1^2},$$

et celle-ci équivaut à

$$h^2+k^2=4\mathrm{A}.$$