NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. LACOUR

Sur le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe (application des fonctions elliptiques)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 543-553

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__543_1>

[F8hγ]

SUR LE MOUVEMENT D'UN SOLIDE PESANT AUTOUR D'UN POINT FIXE (APPLICATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES);

PAR M. E. LACOUR,

Professeur-adjoint à l'Université de Nancy.

1. *Définition des paramètres* α, β, γ, δ. — Ayant en vue de développer un exercice sur les fonctions elliptiques à propos du mouvement de la toupie, tel qu'il est étudié dans le Livre de MM. Klein et Sommerfeld (*Theorie des Kreisels,* Leipzig, Teubner, 1897), expliquons d'abord comment il est utile de substituer aux angles d'Euler ψ, φ et θ, quatre quantités complexes α, β, γ, δ satisfaisant à la condition

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Soient :

$Ox_1y_1z_1$ le système d'axes fixes;
$Oxyz$ le système mobile;
ψ, φ et θ les angles d'Euler qui définissent à chaque instant la position du système mobile.

Supposons écrites les formules de transformation de coordonnées permettant de passer du système fixe au système mobile, les coefficients étant exprimés en fonction des angles ψ, φ et θ. Ces formules se simplifient beaucoup si l'on fait le changement de variables défini par les égalités

$$\begin{aligned} \xi &= x + iy, & \xi_1 &= x_1 + iy_1, \\ \eta &= -x + iy, & \eta_1 &= -x_1 + iy_1, \\ \zeta &= -z, & \zeta_1 &= -z_1; \end{aligned}$$

on trouve alors

$$(1)\qquad \begin{cases} \xi_1 = \alpha^2\xi + \beta^2\eta + 2\alpha\beta\zeta, \\ \eta_1 = \gamma^2\xi + \delta^2\eta + 2\gamma\delta\zeta, \\ \zeta_1 = \alpha\gamma\xi + \beta\delta\,\eta + (\alpha\delta + \beta\gamma)\zeta, \end{cases}$$

en posant

$$\alpha = \cos\frac{\theta}{2}\,e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}}, \qquad \beta = i\sin\frac{\theta}{2}\,e^{\frac{i(-\varphi+\psi)}{2}},$$

$$\gamma = i\sin\frac{\theta}{2}\,e^{\frac{i(\varphi-\psi)}{2}}, \qquad \delta = \cos\frac{\theta}{2}\,e^{\frac{i(-\varphi-\psi)}{2}},$$

Ce sont ces quantités α, β, γ, δ, satisfaisant à la condition

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

que nous nous proposons d'exprimer en fonction du temps dans le problème de la toupie et qui nous conduiront à des fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Mais, avant de traiter le problème de Mécanique, pour justifier l'introduction de ces éléments α, β, γ, δ, nous allons indiquer, d'après M. Klein, comment la transformation définie par les formules (1) se ramène à une substitution de la forme

$$\lambda_1 = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta},$$

α, β, γ, δ étant précisément les quantités complexes que nous venons de définir.

Pour cela, considérons les formules (1) comme définissant le déplacement du trièdre $Oxyz$, dont l'origine reste fixe; un point xyz invariablement lié à ce trièdre reste sur une sphère ayant pour centre l'origine et pour rayon la distance R du point O au point xyz. L'équation de cette sphère, en coordonnées ξ, η, ζ, est

$$\zeta^2 - \xi\eta = R^2.$$

Nous définirons la position du point $\xi\eta\zeta$ sur la sphère à l'aide de deux paramètres λ et λ', si nous posons

$$\frac{\xi}{\lambda\lambda'} = \frac{\eta}{1} = \frac{\zeta}{\frac{\lambda+\lambda'}{2}} = \tau,$$

et si nous déterminons τ de façon que l'on ait

$$\tau^2\left(\frac{\lambda-\lambda'}{2}\right)^2 = R^2.$$

Posons de même

$$\frac{\xi_1}{\lambda_1\lambda'_1} = \frac{\eta_1}{1} = \frac{\zeta_1}{\frac{\lambda_1+\lambda'_1}{2}} = \tau_1,$$

$$\tau_1^2\left(\frac{\lambda_1-\lambda'_1}{2}\right)^2 = R^2.$$

Les formules de transformation (1) peuvent alors s'écrire, en désignant par ρ un facteur de proportionnalité,

$$\rho\lambda_1\lambda'_1 = (\alpha\lambda+\beta)(\alpha\lambda'+\beta),$$
$$\rho = (\gamma\lambda+\delta)(\gamma\lambda'+\delta),$$
$$\rho(\lambda_1+\lambda'_1) = (\alpha\lambda+\beta)(\gamma\lambda'+\delta)+(\alpha\lambda'+\beta)(\gamma\lambda+\delta);$$

on en déduit

$$\lambda_1\lambda'_1 = \frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}\,\frac{\alpha\lambda'+\beta}{\gamma\lambda'+\delta},$$
$$\lambda_1+\lambda'_1 = \frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}+\frac{\alpha\lambda'+\beta}{\gamma\lambda'+\delta},$$

et l'on en peut facilement conclure que, pour obtenir le déplacement défini par les formules (1), il suffit d'effectuer, à la fois sur λ et λ', les substitutions

$$\lambda_1 = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}, \qquad \lambda'_1 = \frac{\alpha\lambda' + \beta}{\gamma\lambda' + \delta},$$

définies de la façon la plus simple par nos quatre paramètres α, β, γ, δ.

2. *Mise en équations du problème de Mécanique.* — La question de Mécanique à laquelle se rattache l'exercice indiqué sur les fonctions elliptiques, est l'étude du mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe, dans le cas considéré par Lagrange et par Poisson; on suppose que l'ellipsoïde d'inertie relatif au point fixe O est de révolution autour d'un axe passant par ce point et que le centre de gravité est sur l'axe.

Prenons pour origine le point de suspension O, pour axes liés au corps l'axe de révolution Oz et deux axes perpendiculaires, pour axes fixes la verticale ascendante Oz_1 et deux axes perpendiculaires [1].

On démontre que les angles d'Euler ψ, φ et θ, qui définissent la position des axes liés au corps par rapport aux axes fixes, sont donnés en fonction du temps par les formules suivantes. D'abord, en posant

$$\cos\theta = z,$$

on a

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (\mu - mz)(1 - z^2) - (\nu - nz)^2 = f(z),$$

où m, n, μ, ν désignent des constantes dont la première m est positive, de sorte que $f(z)$ est un polynome du

(1) *Voir* Appell et Lacour, *Principes de la théorie des fonctions elliptiques*, p. 96.

troisième degré. On a ensuite

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\nu - nz}{1 - z^2},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = r_0 - z\frac{d\psi}{dt} = r_0 - z\frac{\nu - nz}{1 - z^2},$$

r_0 désignant une autre constante.

Inversion. — Pour introduire les fonctions elliptiques, on fait le changement de variable défini par l'égalité

$$z = Ms + N,$$

où M et N sont des constantes choisies de façon que l'équation transformée en s prenne la forme

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3,$$

et l'on construit la fonction $\wp u$ aux invariants g_2 et g_3.

Comme $f(z)$ et, par suite, $4s^3 - g_2^s - g_3$ ont leurs racines réelles, on est dans le cas où l'on peut prendre comme périodes primitives une quantité réelle 2ω et une quantité purement imaginaire $2\omega'$.

On peut alors exprimer z en fonction uniforme du temps t par la formule

$$z = M\wp u + N, \qquad u = t + \omega',$$

le temps étant compté à partir d'une valeur pour laquelle z est égal à la plus petite racine de $f(z)$.

Pour calculer les angles ψ et φ, nous nous limiterons au cas $(n = r_0)$ où l'ellipsoïde d'inertie relatif au point de suspension du solide pesant est une sphère [1]. Alors, en introduisant deux arguments elliptiques a et b définis

[1] *Voir* une Note de M. Darboux à la fin du *Traité de Mécanique* de DESPEYROUS, t. II, p. 527.

par les égalités

$$\mathrm{M}\,p a + \mathrm{N} = 1, \qquad \mathrm{M}\,p b + \mathrm{N} = -1,$$

$$p' a = i\,\frac{\nu - r_0}{\mathrm{M}}, \qquad p' b = i\,\frac{\nu + r_0}{\mathrm{M}},$$

on obtient successivement

$$2i\frac{d\psi}{du} = \frac{p' b}{p u - p b} - \frac{p' a}{p u - p a},$$

$$2i\frac{d\varphi}{du} = \frac{p' b}{p u - p b} + \frac{p' a}{p u - p a}.$$

Dans les expressions de α, β, γ, δ en fonction des angles d'Euler, les angles ψ et φ n'interviennent que par leur somme ou leur différence. Nous sommes donc conduits à ces deux combinaisons des équations précédentes :

$$i\left(\frac{d\varphi}{du} + \frac{d\psi}{du}\right) = \frac{p' b}{p u - p b},$$

$$i\left(\frac{d\varphi}{du} - \frac{d\psi}{du}\right) = \frac{p' a}{p u - p a}.$$

Calcul des paramètres α, β, γ, δ. — Nous avons obtenu pour les paramètres α, β, γ, δ des expressions qui peuvent s'écrire, en se rappelant que $z = \cos\theta$,

$$\alpha = \sqrt{\frac{1+z}{2}}\,e^{i\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)}, \qquad \beta = i\sqrt{\frac{1-z}{2}}\,e^{i\left(\frac{\psi-\varphi}{2}\right)},$$

$$\gamma = i\sqrt{\frac{1-z}{2}}\,e^{i\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)}, \qquad \delta = i\sqrt{\frac{1-z}{2}}\,e^{-i\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)},$$

Prenons les dérivées logarithmiques des deux membres de chacune de ces égalités, remplaçons z, $\frac{d\varphi}{du} + \frac{d\psi}{du}$, $\frac{d\varphi}{du} - \frac{d\psi}{du}$ par leurs valeurs, il vient

$$\frac{d}{du}(\operatorname{Log}\alpha) = \frac{1}{2}\,\frac{p' u + p' b}{p u - p b}, \qquad \frac{d}{du}(\operatorname{Log}\beta) = \frac{1}{2}\,\frac{p' u - p' a}{p u - p a},$$

$$\frac{d}{du}(\operatorname{Log}\gamma) = \frac{1}{2}\,\frac{p' u + p' a}{p u - p a}, \qquad \frac{d}{du}(\operatorname{Log}\delta) = \frac{1}{2}\,\frac{p' u - p' b}{p u - p b}.$$

On voit qu'on passe de α à β, γ, δ en changeant respectivement b en $-a$, a, $-b$: il nous suffira de détailler pour α les calculs d'intégration.

La décomposition en éléments simples de la fonction à intégrer est donnée ici par la formule d'addition pour la fonction ζu : à l'aide de cette formule, on trouve

$$\operatorname{Log}\alpha = \int [\zeta(u-b) - \zeta u + \zeta b]\, du,$$

$$\operatorname{Log}\alpha = \operatorname{Log}\sigma(u-b) - \operatorname{Log}\sigma u + u\zeta b + \operatorname{Log} h_1,$$

h_1 désignant une constante, puis

$$\alpha = h_1 e^{u\zeta b} \frac{\sigma(u-b)}{\sigma u}.$$

On trouve de même

$$\beta = h_2 e^{-u\zeta a} \frac{\sigma(u+a)}{\sigma u},$$

$$\gamma = h_3 e^{u\zeta a} \frac{\sigma(u-a)}{\sigma u},$$

$$\delta = h_4 e^{-u\zeta b} \frac{\sigma(u+b)}{\sigma u},$$

h_2, h_3, h_4 désignant de nouvelles constantes.

Au lieu des fonctions σ et ζ de Weierstrass, il peut être commode, pour les calculs numériques par exemple, d'introduire les fonctions H et Z de Jacobi reliées aux précédentes par les formules

$$\frac{\mathrm{H}(u)}{\mathrm{H}'(0)} = e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2} \sigma u,$$

$$\mathrm{Z}u = \zeta u - \frac{\eta}{\omega} u.$$

On trouve alors

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= C_1 e^{uZb} \frac{H(u-b)}{H(u)} \\
\beta &= C_2 e^{-uZa} \frac{H(u+a)}{H(u)} \\
\gamma &= C_3 e^{uZa} \frac{H(u-a)}{H(u)} \\
\delta &= C_4 e^{-uZb} \frac{H(u+b)}{H(u)}
\end{aligned}\right\} \qquad (u = t + \omega'),$$

C_1, C_2, C_3, C_4 désignant de nouvelles constantes.

Ces constantes se déterminent en fonction des données initiales en faisant $t = 0$ dans les formules précédentes.

Enfin rappelons que $H(u)$ représente la série

$$H(u) = 2\sqrt[4]{q} \sin \frac{\pi u}{2\omega} - 2\sqrt[4]{q^9} \sin \frac{5\pi u}{2\omega} + 2\sqrt[4]{q^{25}} \sin \frac{5\pi u}{2\omega} - \ldots,$$

$$q = e^{\frac{i\pi\omega'}{\omega}}, \qquad u = t + \omega'.$$

3. *Calcul des constantes elliptiques.* — Proposons-nous maintenant d'exprimer directement en fonction des données μ, ν, r_0 et des racines de $f(z)$ (qui peuvent être calculées dès que l'on connaît les valeurs de μ, ν, r_0) d'une part, les deux périodes 2ω, $2\omega'$ d'autre part, les arguments elliptiques a et b.

On sait que les trois racines du polynome $f(z)$ considéré en commençant sont toutes les trois réelles et que, si l'on désigne par z_1, z_2, z_3 ces racines rangées par ordre de grandeur décroissante, les nombres

$$z_1, \quad 1, \quad z_2, \quad z_3. \quad -1$$

sont aussi rangés par ordre de grandeur. On a fait le changement de variable

$$z = Ms + N. \qquad s = pu,$$

et la valeur trouvée pour M $\left(M = \frac{4}{m}\right)$ est positive. Cela posé, on voit de suite que l'on a

$$\omega = \int_{e_3}^{e_2} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = \int_{z_3}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}},$$
$$\omega' = \int_{e_3}^{-\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = \int_{z_3}^{-\infty} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}}.$$

Dans ces formules, les intégrales sont prises suivant des chemins rectilignes; de plus, dans la première, le radical qui est réel est pris avec le signe $+$; dans la seconde, le signe du radical, qui est purement imaginaire, est choisi de façon que $\frac{1}{i}\sqrt{f(z)}$ soit > 0.

Nous allons de même représenter a et b par des intégrales définies, mais, pour pouvoir préciser, nous devons connaître les signes de $\frac{1}{i}\,p'a$ et $\frac{1}{i}\,p'b$. Pour cette discussion, nous nous limitons au cas où l'on a

$$0 < \nu < r_0,$$

de sorte que

$$\frac{1}{i}\,p'a < 0, \qquad \frac{1}{i}\,p'b > 0.$$

Cela posé, puisque pb est réel et $\frac{1}{i}\,p'b$ positif, b est purement imaginaire; on peut prendre b de façon que

$$\frac{\omega'}{i} < \frac{b}{i} < \frac{2\omega'}{i}.$$

En remarquant que, quand z varie de z_3 à -1, u varie de ω' à b, et s de e_3 à pb, on trouve sans peine que l'on a

$$b - \omega' = \int_{e_3}^{pb} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = \int_{z_3}^{-1} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}},$$

l'intégrale étant prise le long d'un chemin rectiligne et les signes des radicaux étant définis par les inégalités

$$\frac{1}{i}\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3} > 0, \qquad \frac{1}{i}\sqrt{f(z)} > 0.$$

On trouve, en raisonnant d'une façon analogue,

$$a - \omega - \omega' = \int_{e_2}^{ra} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = \int_{z_2}^{1} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}},$$

les intégrales étant encore prises suivant des chemins rectilignes et les signes des radicaux déterminés par les conditions

$$\frac{1}{i}\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3} < 0, \qquad \frac{1}{i}\sqrt{f(z)} < 0.$$

Remarque. — Les formules précédentes, qui se prêtent facilement aux applications numériques et qui montrent d'une façon simple comment les résultats se relient aux données de la question, se trouvent, à un changement de notation près, dans le Livre déjà cité (*Theorie des Kreisels*, p. 420). MM. Klein et Sommerfeld y parviennent par une autre voie : les intégrales elliptiques qui donnent α, β, γ, δ en fonction de z sont étudiées à l'aide de la surface de Riemann qui correspond à $\sqrt{f(z)}$ et de la représentation conforme de cette surface sur le plan de la variable t; on reconnaît ainsi que α, β, γ, δ sont des fonctions uniformes, doublement périodiques de seconde espèce de la variable t; on détermine leurs périodes, leurs multiplicateurs, leurs zéros et leurs infinis, et l'on peut alors obtenir immédiatement leur expression sous la forme d'un quotient de fonctions H multiplié par une exponentielle à exposant linéaire.

La méthode suivie dans cette Note consiste à introduire de suite les fonctions elliptiques correspondant à l'intégrale

$$t = \int \frac{dz}{\sqrt{f(z)}}$$

et à décomposer en éléments simples les fonctions à intégrer, après avoir mis les constantes sous la forme convenable; l'intégration est alors immédiate.

Les deux méthodes conduisent aux mêmes formules définitives et aux mêmes calculs numériques.