N. SALTYKOW

Sur la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 533-543

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__533_1>

[H8]

SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE D'UNE SEULE FONCTION ;

PAR M. N. SALTYKOW.

1. Le point capital de la théorie des équations en question consiste à réduire leur intégration aux équations aux différentielles ordinaires ou totales. On en connaît deux méthodes fondées sur les idées d'illustres géomètres, Lagrange et Jacobi. Toutefois les recherches qui vont suivre semblent avoir un intérêt au point de vue didactique.

Considérons l'équation différentielle

$$(1) \qquad p_1 + X_1 p_2 + X_2 p_3 + \ldots + X_{n-1} p_n = X,$$

où $X_1, X_2, \ldots, X$ sont des fonctions des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et de leur fonction inconnue z, les p_i désignant les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x_i}$.

Supposons que la relation

$$(2) \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C$$

définit une solution de l'équation (1), C étant une constante arbitraire. Il vient

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial z} p_i = 0,$$

et, par suite, l'égalité

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \ldots + X_{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_n} + X \frac{\partial f}{\partial Z} = 0$$

est identiquement vérifiée.

Inversement, la relation (2) fournit une intégrale de l'équation (1), si f, considérée comme fonction des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, vérifie l'équation (3). En effet, comme on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{\partial f}{\partial z} p_i.$$

l'identité (3) devient

$$\frac{\partial f}{\partial z}(p_1 + X_1 p_2 + \ldots + X_{n-1} p_n - X) = 0.$$

La dérivée $\frac{\partial f}{\partial z}$ ne s'annulant pas, par hypothèse, notre assertion devient donc évidente.

Jacobi a démontré [1] que *l'équation* (3) *admet n in-*

---

(1) *Dilucidationes de æquationum differentialium vulgarium systematis earumque connexione cum æquationibus differentialibus partialibus linearibus primi ordinis* (*Gesammelte Werke*, Bd. IV, S. 147, n° 5).

tégrales distinctes, si elle en a une. Par conséquent. l'équation (3) étant intégrable [1], il existe n équations

$$(4)\qquad f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

donnant n solutions distinctes de l'équation (1), et il en résulte des identités

$$(5)\qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + X_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \ldots + X \frac{\partial f_i}{\partial z} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

C_i étant des constantes arbitraires.

2. Cela posé, supposons l'équation (3) intégrable. Le problème que nous nous proposons de résoudre, c'est de *former un système d'équations différentielles ordinaires dont l'intégrale générale soit définie par le système* (4).

Il est à remarquer, en premier lieu, que le déterminant fonctionnel

$$(6)\qquad D\left(\frac{f_1, f_2, \ldots, f_n}{x_2, x_3, \ldots, z}\right)$$

ne s'annule pas, les f_i étant encore distinctes, considérées comme fonctions des x_2, x_3, ..., x_n, z seulement. Car s'il existait une relation

$$F(x_1, f_1, f_2, \ldots, f_n) = 0,$$

on en tirerait, en vertu des identités (5),

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0,$$

et les fonctions f_i ne seraient plus distinctes, contrairement à notre hypothèse. Il s'ensuit que les équations (4)

---

[1] Par le mot *intégrable,* nous comprenons que l'équation (3) admet une intégrale.

sont résolubles par rapport aux $x_2, x_3, \ldots, x_n, z$. Nous sommes donc en état d'imaginer un système

$$(7)\qquad \frac{dx_2}{dx_1} = Z_1, \qquad \frac{dx_3}{dx_1} = Z_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{dz}{dx_1} = Z,$$

dont les intégrales sont représentées par les équations (4). Mais les dérivées totales de ces dernières par rapport à x_1 étant vérifiées, en vertu du système (7), on a les identités

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} Z_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_3} Z_2 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial z} Z = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

donnant les valeurs $Z_1, Z_2, \ldots, Z$ en fonctions des f_i. Toutefois il est aisé d'obtenir les mêmes valeurs en fonctions des $X_1, X_2, \ldots$ car il suffit de recourir aux identités (5) pour en avoir de nouvelles :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_2}(Z_1 - X_1) + \frac{\partial f_i}{\partial x_3}(Z_2 - X_2) + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial z}(Z - X) = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Le déterminant (6) ne s'annulant pas, on a

$$Z_1 = X_1, \qquad Z_2 = X_2, \qquad \ldots, \qquad Z = X,$$

et le système (7) devient

$$(8)\qquad \frac{dx_2}{dx_1} = X_1, \qquad \frac{dx_2}{dx_1} = X_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{dz}{dx_1} = X.$$

Inversement, chaque intégrale du dernier système

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C$$

fournit une solution de l'équation (1), car la fonction f satisfait à la relation (3).

Par conséquent, l'équation (3) est intégrable en même temps que le système (8).

Or, considérons le domaine où X_1, X_2, ... sont des fonctions holomorphes de toutes les variables x et z. Il est bien connu que, dans ce domaine, les équations (8) admettent n intégrales distinctes de forme (4), les fonctions f_i y étant holomorphes.

Donc, *pour le même domaine, l'équation* (1) *admet n solutions distinctes qui s'obtiennent en intégrant le système* (8).

Enfin, l'intégrale générale de l'équation (1) est représentée par la formule

$$\Pi(f_1, f_2, \ldots, f_n) = 0, \tag{9}$$

Π étant une fonction arbitraire. Cette dernière intégrale jouit de la propriété bien connue de contenir toutes les solutions de l'équation (1) pour le domaine où ses coefficients restent holomorphes. Si la fonction X est nulle, l'équation (1) admet une intégrale évidente

$$z = \text{const.}$$

La formule (9) peut être mise alors sous la forme

$$z = \Pi(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}),$$

$f_1, f_1, \ldots, f_{n-1}$ présentant $n-1$ intégrales de l'équation considérée distinctes de z. C'est ainsi que l'intégrale générale de l'équation (3) est

$$f - \Pi(f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

Nous avons toujours supposé dans les recherches précédentes que les équations (4) contiennent explicitement la variable z. Les considérations complémentaires sont donc nécessaires dans le cas contraire. Ce fait se présente, par exemple, quand les fonctions X_1, X_2, ... ne contiennent plus z. Or Jacobi a démontré dans son Mémoire cité plus haut [1] que le problème étudié revient dans ce cas de même à intégrer le système (8).

3. Passons à présent aux équations simultanées

$$(10)\qquad \begin{cases} p_k + \sum_{r=1}^{n-m} X_k^r p_{m+r} = X_k, \\ k = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

les coefficients X étant des fonctions des variables x et z. On n'en étudie ordinairement que les intégrales admettant les dérivées partielles de deux premiers ordres continues. Nous le ferons de même et nous supposerons de plus que le système (10) est *jacobien* [2], en y comprenant que ses intégrales ne satisfont qu'aux équations (10). Il est donc nécessaire que les égalités

$$(11)\qquad \begin{cases} X^k(X_h^r) - X^h(X_k^r) = 0, \\ X^k(X_h) - X^h(X_k) = 0, \\ r = 1, 2, \ldots, n-m \end{cases}$$

soient vérifiées pour toutes les valeurs distinctes des indices h, k de 1 à m, en représentant symboliquement par X^k l'opération

$$\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^{n-m} X_k^r \frac{\partial}{\partial x_{m+r}} + X_k \frac{\partial}{\partial z}.$$

Cela posé, soit la valeur de z, tirée de l'équation

$$(12)\qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C,$$

une intégrale du système (10), C étant une constante ar-

---

(1) *Gesammelte Werke,* Bd IV, p. 176, n° 6.
(2) On nomme ordinairement *jacobiens* les systèmes homogènes seulement.

bitraire. On en conclut que les relations

$$X^k(f) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m \tag{13}$$

sont identiquement vérifiées.

Inversement, l'égalité (12) fournit une solution du système (10), si la fonction f satisfait aux équations (13). En effet, comme la dérivée $\frac{\partial f}{\partial z}$ ne s'annule pas, notre assertion est une conséquence immédiate des identités

$$\frac{\partial f}{\partial z}\left(p_k + \sum_{r=1}^{n-m} X_k^r p_{m+r} + X_k\right) = 0,$$
$$k = 1, 2, \ldots, m.$$

4. On démontre aisément que les conditions (11) sont non seulement nécessaires, mais aussi suffisantes pour que les équations (10) soient intégrables, car *le système* (13) *possède, étant de même jacobien,* $n - m + 1$ *intégrales distinctes et holomorphes dans le domaine où les fonctions* X *le sont aussi.* Il existe, par conséquent, $n - m + 1$ équations distinctes

$$\begin{cases} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C_i, \\ i = 1, 2, \ldots, n - m + 1, \end{cases} \tag{14}$$

f_i étant des fonctions holomorphes, satisfaisant identiquement aux relations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k} + \displaystyle\sum_{r=1}^{n-m} X_k^r \frac{\partial f_i}{\partial x_{m+r}} + X_k \frac{\partial f_i}{\partial z} = 0, \\ k = 1, 2, \ldots, m, \end{cases} \tag{15}$$

C_i étant des constantes arbitraires. De plus, on a

$$D\left(\frac{f_1, f_2, \ldots, f_{n-m+1}}{x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, z}\right) \gtrless 0. \tag{16}$$

Les équations (14) sont donc résolubles par rapport aux variables $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n, z$, et il est aisé d'en tirer ces dernières valeurs en fonctions des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et de $n-m+1$ constantes arbitraires.

Nous sommes à présent en état d'aborder le problème fondamental de *former un système d'équations aux différentielles totales*

$$(17)\quad \begin{cases} dx_{m+r} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} Z_k^r\, dx_k, \\ dz = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} Z_k\, dx_k, \\ r = 1, 2, \ldots, n-m, \end{cases}$$

dont les intégrales soient les équations (14). Pour obtenir les valeurs des fonctions Z, nous avons à remarquer que les différentielles totales des équations (14) donnent, en vertu du système (17), les identités

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial f_i}{\partial x_{m+r}} Z_k^r + \frac{\partial f_i}{\partial z} Z_k\right) dx_k = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n-m+1,$$

car il est impossible d'éliminer les constantes C_i entre les équations (14). Or les variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ étant indépendantes, on a identiquement

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial f_i}{\partial x_{m+r}} Z_k^r + \frac{\partial f_i}{\partial z} Z_k = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n-m+1,$$

l'indice k prenant toutes les valeurs de 1 à m. En y joignant les identités (15), il vient

$$\sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial f_i}{\partial x_{m+r}}(Z_k^r - X_k^r) + \frac{\partial f_i}{\partial z}(Z_k = X_k) = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n - m + 1.$$

L'inégalité (16) ayant lieu, nous avons

$$Z_k^r = X_k^r, \qquad Z_k = X_k.$$

Le système (17) devient donc

$$(18) \qquad \begin{cases} dx_{m+r} = \sum_{k=1}^{m} X_k^r \, dx_k, \\ dz = \sum_{k=1}^{m} X_k \, dx_k, \\ r = 1, 2, \ldots, n - m. \end{cases}$$

Inversement, on tire de chaque intégrale du dernier système une solution du (10)$^{\text{ième}}$, les identités (15) étant satisfaites, et les $n - m + 1$ intégrales distinctes des équations (18) en définissent les solutions requises du système (10).

Enfin la formule

$$\Pi(f_1, f_2, \ldots, f_{n-m+1}) = 0,$$

Π désignant une fonction arbitraire, représente une intégrale générale du système (10). Cette dernière jouit de la propriété remarquable de contenir toutes les solutions des équations (10) pour le domaine où leurs coefficients sont holomorphes, comme je l'ai démontré dans un cas bien plus général dans mon Travail : *Étude sur les intégrales d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles de plusieurs fonctions inconnues* (¹).

(¹) *Journal* de M. Jordan, p. 423; 1897.

Si les fonctions X_k étaient nulles, les équations (10) étant homogènes, l'une de leurs solutions est évidemment

$$z = \text{const.}$$

C'est-à-dire l'intégrale générale correspondante peut être représentée par la formule

$$z = \Pi(f_1, f_3, \ldots, f_{n-m}).$$

5. Les considérations citées ne sont permises que si les fonctions f_i dépendent de z, selon l'hypothèse introduite. Par suite, il est indispensable d'étudier le cas, où les équations (18) admettent des intégrales indépendantes de z,

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_i,$$
$$i = 1, 2, \ldots, l, \qquad l < n - m + 1.$$

Les dernières équations sont toujours résolubles par rapport à l variables quelconques parmi $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ que nous nommerons $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{m+l}$. En introduisant $f_1, f_2, \ldots, f_l$ comme nouvelles variables indépendantes au lieu de ces dernières, les équations (10) deviennent

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} + \sum_{s=l+1}^{n-m} (X_k^s) \frac{\partial z}{\partial x_{m+s}} = (X_k),$$
$$k = 1, 2, \ldots, m,$$

les parenthèses désignant le résultat de la transformation effectuée, et forment un système jacobien. Les équations aux différentielles totales correspondantes sont présentées par les $n - m - l + 1$ équations que l'on obtient de $n - m - l + 1$ dernières du système (18), en y éliminant les variables $x_{m+1}, \ldots, x_{m+l}$. Soit leur intégrale générale donnée par les équations

$$f_{l+j}(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+l+1}, \ldots, x_n, z, f_1, f_2, \ldots, f_l) = C_{l+j},$$
$$j = 1, 2, \ldots, n - m - l + 1.$$

Il est évident que l'intégrale générale du système examiné aux dérivées partielles est une fonction arbitraire de toutes les $n - m + 1$ fonctions f, exprimées en x et z. Par conséquent, le problème d'intégration du système (10) revient toujours à intégrer les équations (18).