NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LEFEBVRE

Étude d'un système de deux miroirs sphériques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 512-529

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__512_0>

[P1a]

ÉTUDE D'UN SYSTÈME DE DEUX MIROIRS SPHÉRIQUES;

PAR M. LEFEBVRE.

I. — RÉFLEXION PAR UN MIROIR SPHÉRIQUE.

Soit un miroir sphérique de foyer F, de distance focale f; une droite O perpendiculaire à l'axe principal xy en B; I son image perpendiculaire à l'axe en B'. Nous admettrons que

$$\overline{FB}.\overline{FB'} = f^2, \tag{1}$$

$$\frac{I}{O} = \frac{f}{\overline{FB}}. \tag{2}$$

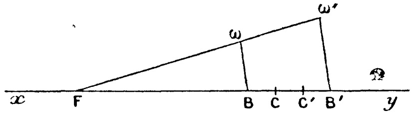
L'image I est droite, si elle est, par rapport à F, du côté du sommet; renversée si elle est, par rapport à F, du côté du centre de courbure du miroir.

Il résulte de (1) que les points B de l'axe et leurs conjugués B' forment une involution ayant l'axe pour base, le foyer F pour point central et f^2 pour puissance. Nous l'appellerons *involution relative au miroir m.*

Sur un rayon vecteur $F\omega\omega'$, prenons deux points ω et ω' tels que

$$\overline{F\omega}.\overline{F\omega'} = f^2,$$

Fig. 1.



ωB et ω'B' seront deux droites antiparallèles par rapport à l'angle F.

Règle I. — Par suite, pour construire le conjugué B′ de B, mener la circonférence passant par B, ω et ω′; elle coupe l'axe en B′.

En particulier, si $\overline{F\omega} = f$, ω et ω′ coïncident; la circonférence à mener serait la circonférence passant par B et tangente en ω à F ω.

D'après (1) et (2), on voit que

$$(3) \qquad \pm\frac{1}{O} = \frac{f}{\overline{FB}} = \frac{\overline{FB'}}{f} = \sqrt{\frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}}.$$

Considérons une circonférence quelconque passant par deux points homologues réels ou imaginaires C, C′ de l'involution relative au miroir *m*.

BB′, CC′ et O étant deux couples de points homologues et le point central d'une involution

$$\frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{B'C'}.\overline{B'C}}{\overline{BC'}.\overline{BC}}.$$

Par suite, en appelant π(B) la puissance de B par rapport à la circonférence C ω ω′ C′,

$$(4) \qquad \pm\frac{1}{O} = \sqrt{\frac{\overline{B'C'}.\overline{B'C}}{\overline{BC'}.\overline{BC}}} = \frac{\sqrt{\pi(B')}}{\sqrt{\pi(B)}}.$$

La circonférence C ω ω′ C′ a une très grande indétermination; elle n'est assujettie qu'à passer par deux points homologues de l'involution relative au miroir *m*. D'où ce théorème :

Si par deux points homologues quelconques d'une involution, on mène une circonference quelconque, le rapport des puissances de deux points conjugués de l'involution par rapport à cette circonférence est invariable.

Et cette règle :

Règle II. — Le rapport de l'image à l'objet par rapport à un miroir sphérique est égal au rapport des racines carrées des puissances de leurs pieds sur l'axe par rapport à une circonférence coupant l'axe en deux points homologues de l'involution relative au miroir.

En particulier, tout point ω à distance f de F peut être regardé comme une circonférence évanouissante répondant aux conditions énoncées. Donc :

Règle III. — Étant donné un point ω à distance f de F, le rapport de l'image à l'objet est égal au rapport des distances des pieds sur l'axe au point ω.

II. — Réflexion par deux miroirs.

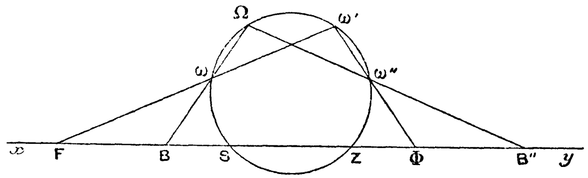
Soient F et Φ les foyers des miroirs m et μ; f et φ leurs distances focales. Soient O une droite objet perpendiculaire à l'axe en B, I' son image par rapport à m perpendiculaire à l'axe en B', I'' l'image de I' par rapport à μ perpendiculaire à l'axe en B''.

Les points B de l'axe et leurs conjugués B' déterminent sur l'axe une involution, l'involution relative au miroir m. De même les points B' de l'axe et leurs conjugués B'' par rapport à μ déterminent sur l'axe une involution ayant l'axe pour base, le foyer pour point central, φ^2 pour puissance; nous l'appellerons l'*involution relative au miroir* μ.

Il en résulte que les points B et B'' déterminent deux divisions homographiques ayant l'axe pour base commune; F et Φ en sont des points homologues. Nous les appellerons *divisions homographiques relatives à deux réflexions.*

Soient S et Σ les points doubles réels ou imaginaires de ces deux divisions. Par S et Σ menons une circonférence $S\Sigma\omega'$ et joignons $\omega'\omega F$, $\omega'\omega''\Phi$.

Fig. 2.



Si un point mobile Ω *décrit une circonférence, les droites* $\Omega\omega$, $\Omega\omega''$ *qui joignent ce point à deux points fixes sur la circonférence forment deux faisceaux homographiques.* Ces faisceaux détermineront ici sur xy deux divisions homographiques, dont S et Σ seront évidemment les points doubles, F et Φ deux points correspondants. Ce sont donc précisément les *divisions homographiques relatives à deux réflexions.* Nous dirons que la circonférence $S\omega\omega''\Sigma$ est une circonférence polaire du système, et que ω et ω'' sont les points directeurs correspondants.

Connaissant ces éléments, il sera facile de construire le conjugué B' de B.

D'autre part, S et Σ sont des points homologues dans chacune des involutions relatives aux miroirs m et μ. D'après ce qui a été vu [I, équation (4)], si l'on appelle $\pi(B)$ la puissance de B par rapport à $S\omega\omega''\Sigma$:

$$\pm\frac{I'}{O}=\frac{\sqrt{\pi(B')}}{\sqrt{\pi(B)}},\qquad \pm\frac{I''}{I'}=\frac{\sqrt{\pi(B'')}}{\sqrt{\pi(B')}},$$

et, par suite,

$$\pm\frac{I''}{O}=\frac{\sqrt{\pi(B'')}}{\sqrt{\pi(B')}}.$$

Si l'objet O vient en F, l'image I'' vient en Φ : elle est droite si les miroirs sont d'espèce contraire, renversée s'ils sont de même espèce (concaves ou convexes). Si l'objet se déplace, le sens de l'image ne change que quand elle passe par l'infini, c'est-à-dire quand B' passe en Φ; autrement dit, quand $B\Omega B''$ qui était égal à $\omega\omega'\omega''$ prend une valeur supplémentaire.

En résumé, si l'on connaît une circonférence polaire et les points directeurs.

Règle IV. — Pour construire le conjugué B'' de B, mener $B\omega$ qui rencontre la circonférence polaire en Ω, joindre $\Omega\omega''$: cette droite coupe l'axe en B''. Le rapport de l'image à l'objet est égal au rapport des racines carrées des puissances de B'' et B par rapport à la circonférence polaire.

Pour deux miroirs de même espèce, l'image est renversée si $\widehat{B\Omega B''}$ et $\widehat{\omega\omega'\omega''}$ sont égaux, droite si ces angles sont supplémentaires. C'est l'inverse pour des miroirs d'espèce contraire.

En particulier, si les points doubles S et Σ des divisions homographiques relatives à deux réflexions sont imaginaires, on sait que ces divisions peuvent être engendrées par la rotation d'un angle constant autour de son sommet. Ce sommet peut être considéré comme une circonférence évanouissante passant par S et Σ. Nous appellerons ce point *pôle optique* du système; l'angle constant, *angle caractéristique*. Ceci posé :

Règle V. — Pour obtenir le conjugué B' de B, il suffit de faire tourner $B\omega$ autour de ω de l'angle caractéristique; $B\omega$ vient alors couper l'axe en B''. Le rapport de l'image à l'objet est alors égal au rapport des distances de B'' et de B au pôle ω. Le sens de l'image sera défini comme dans le cas d'une circonférence polaire.

Un point lumineux placé en S (ou Σ) a son conjugué après une réflexion en Σ (ou S); son conjugué après deux réflexions coïncide avec lui. S et Σ sont donc les *points de Bravais* du système optique relativement à deux réflexions. En raison de leur rôle, nous les appellerons, dans la suite, *points asymptotiques* du système.

Si l'objet est en S ou Σ, il faut chercher directement le rapport des images à l'objet. D'après (3), si l'objet est en S,

$$\frac{I'}{O} = \pm\sqrt{\frac{F\Sigma}{FS}}, \qquad \frac{I''}{I'} = \pm\sqrt{\frac{\Phi S}{\Phi\Sigma}},$$

et

$$(5) \qquad \frac{I''}{O} = \pm\sqrt{\frac{F\Sigma}{FS} : \frac{\Phi\Sigma}{\Phi S}}.$$

Si l'objet est en Σ, on a de même

$$(6) \qquad \frac{I'}{O} = \pm\sqrt{\frac{FS}{F\Sigma}}, \qquad \frac{I''}{O} = \pm\sqrt{\frac{FS}{F\Sigma} : \frac{\Phi S}{\Phi\Sigma}}.$$

$\frac{F\Sigma}{FS} : \frac{\Phi\Sigma}{\Phi S}$ est le rapport anharmonique des points F, Φ, S, Σ. Posons

$$(7) \qquad \frac{F\Sigma}{FS} : \frac{\Phi\Sigma}{\Phi S} = \psi^2.$$

On aura

$$(8) \qquad \left(\frac{I''}{O}\right)_s = \psi, \qquad \left(\frac{I''}{O}\right)_\Sigma = \frac{1}{\psi}.$$

Étant données deux divisions homographiques de même base, le rapport anharmonique de deux points correspondants et de deux points doubles est constant.

On a donc, en tenant compte de (7) et remarquant que F et Φ sont correspondants,

$$(9) \qquad \frac{B\Sigma}{BS} : \frac{B''\Sigma}{B''S} = \frac{F\Sigma}{FS} : \frac{\Phi\Sigma}{\Phi S} = \psi^2,$$

relation très simple entre les positions de B, B'', Σ, S.

On peut remarquer que quand S et Σ sont réels, ψ^2 est essentiellement positif, et qu'on peut dénommer S et Σ, de façon que ψ^2 soit supérieur à 1. ψ^2 ne pourrait être égal à 1 que si F et Φ ou S et Σ coïncidaient.

III. — Pôles et circonférences polaires.

Le faisceau des circonférences polaires d'un système de miroirs n'est autre que le faisceau des circonférences qui coupent orthogonalement les circonférences (F) et (Φ) décrites de F et Φ comme centres, avec f et φ comme rayons.

En effet,

$$FS.F\Sigma = f^2, \qquad \Phi S.\Phi\Sigma = \varphi^2.$$

Les circonférences polaires coupant l'axe en des points homologues de chacune des involutions relatives à m et à μ, on peut s'en servir pour appliquer la *règle II* (la *règle III*, dans le cas d'une circonférence évanouissante).

IV. — Classification des systèmes de deux miroirs.

Au point de vue de l'étude des réflexions multiples, on pourra classer les systèmes de deux miroirs d'après la nature des divisions homographiques relatives à deux réflexions, ou, ce qui revient au même, d'après le mode d'intersection des circonférences (F) et (Φ).

Divisions homographiques ayant :	Circonférences (F) et (Φ).	Systèmes.
2 points doubles imaginaires	Sécantes.	Périodiques.
2 points doubles réels	Non sécantes.	Apériodiques.
2 points doubles confondus	Tangentes.	Intermédiaires.
1 point double à l'infini..........	Concentriques.	Homofocaux.
Tous les points doubles...........	Confondues.	Singuliers.

Nous représenterons dorénavant par B_n, I_n l'image après n réflexions du point B_0, de l'objet I_0 si la dernière réflexion se fait sur le miroir μ ; par B_{-n}, I_{-n} les images après n réflexions si la dernière se fait sur le miroir m. Cette notation est rationnelle, parce que B_0 est évidemment l'image après n réflexions de B_{-n}, la dernière réflexion se faisant sur le miroir μ.

V. — Systèmes périodiques.

Les divisions homographiques relatives à deux réflexions ont leurs points doubles S, Σ imaginaires : le système de miroirs a ses points asymptotiques S, Σ imaginaires. Les cercles (F) et (Φ) se coupent en deux points réels ; ces points peuvent être regardés comme des circonférences polaires évanouissantes : le système a deux pôles optiques symétriques par rapport à l'axe.

Soit ω l'un d'eux. D'après la règle V, on voit immédiatement que :

Pour obtenir B_{2n}, il suffira de faire tourner $B_0\omega$ autour de ω de n fois la rotation caractéristique $\widehat{F\omega\Phi}$; le point d'intersection avec l'axe sera B_{2n}.

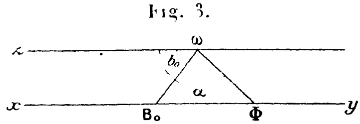
Pour obtenir B_{-2n}, il suffira d'effectuer la même rotation en sens inverse.

$B_{1\pm 2n}$ se déduira de B_1 comme $B_{\pm 2n}$ de B_0.

D'après les *règles III* et *V :*

Le rapport d'une image quelconque I_n à l'objet I_0 sera égal au rapport des distances B_n et B_0 au pôle ω.

Fig. 3.



Le sens des images se déduira aisément du cas de deux réflexions.

On peut définir la position d'un point B_0 sur l'axe par l'angle b_0 dont il faut faire tourner ωz (parallèle à yx) pour l'amener sur ωB_0.

Soient ω la valeur de la rotation caractéristique, α l'angle qui définit la position du foyer Φ sur l'axe, on a évidemment

$$(10)\qquad b_1 = \alpha - b_0,\quad b_{2n} = b_0 + n\omega,\quad b_{1+2n} = \alpha - b_0 + n\omega.$$

VI. — Systèmes apériodiques.

Les divisions homographiques relatives à deux réflexions ont leurs points doubles réels, distincts, à distance finie : ce sont les points asymptotiques du système. Les cercles (F) et (Φ) se coupent en deux points imaginaires : pas de pôles réels.

B_{2n} se déduira aisément de B_0 en répétant n fois la construction indiquée à la règle IV. B_{-2n} s'en déduira en faisant ces constructions en sens inverse. $B_{1\pm 2n}$ se déduira de B_1 comme $B_{\pm 2n}$ de B_0.

D'après les règles II et IV, le rapport d'une image quelconque I_n à l'objet I_0 est égal au rapport des racines carrées des puissances de B_n et B_0 par rapport à une circonférence polaire. Le sens se déterminera sans difficulté.

D'après l'équation (9), on a, entre B_0 et B_2, la relation

$$\frac{B_2\Sigma}{B_2 S} = \frac{1}{\psi^2}\,\frac{B_0\Sigma}{B_0 S}.$$

Par suite,

$$(11)\qquad \frac{B_{2n}\Sigma}{B_{2n}S} = \left(\frac{1}{\psi^2}\right)^n \frac{B_0\Sigma}{B_0 S},\qquad \frac{B_{1+2n}\Sigma}{B_{12+n}S} = \left(\frac{1}{\psi^2}\right)^n \frac{B_1\Sigma}{B_1 S}.$$

D'ailleurs, d'après la remarque qui termine II, ψ^2 est plus grand que 1. Il en résulte que deux images comprennent les *deux* points S et Σ ou n'en comprennent aucun. D'autre part, B_{2n} et B_{1+2n} tendront vers le point asymptotique Σ, si la dernière réflexion se fait sur μ, $(n > 0)$; vers le point asymptotique S, si la dernière réflexion se fait sur m, $(n < 0)$. Pour un objet qui n'est ni en S, ni en Σ, les quatre groupes d'images tendent en position vers l'un des points asymptotiques (selon le groupe), en grandeur vers O.

Pour un objet placé en S, les images d'ordre pair se font en S, les images d'ordre impair en Σ. D'après les équations (3) et (8)

$$(12) \qquad \frac{I_{2n}}{I_0} = \pm \psi^n, \qquad \frac{I_{1+2n}}{I_0} = \pm \sqrt{\frac{F\Sigma}{FS}}\,\psi^{n+1},$$

les images tendent vers O ou croissent indéfiniment, selon que la dernière réflexion se fait sur m ou sur μ $(n < 0$ ou $n > 0)$.

Ce serait le contraire pour un objet placé en Σ.

VII. — Systèmes intermédiaires.

Les divisions homographiques relatives à deux réflexions ont leurs points doubles confondus en O. Les cercles (F) et (Φ) sont tangents en ce même point. Ce point est à la fois point asymptotique et pôle optique. Toutes les circonférences polaires sont tangentes à l'axe en ce point.

Ce cas se présente si le centre ou le sommet du premier miroir coïncident avec le centre sur le sommet du second.

La construction de B_n se fera comme dans un système apériodique. Le rapport de l'image I_n à l'objet I_0 est égal au rapport des distances de B_n et B_0 au pôle O (comme dans un système périodique).

Étant données deux divisions homographiques ayant *leurs points doubles confondus, la différence des inverses des distances au point double est constante pour deux points correspondants.*

Donc

$$\frac{1}{\overline{OB}_2} - \frac{1}{\overline{OB}_0} = \frac{1}{\overline{O\Phi}} - \frac{1}{\overline{OF}}.$$

Par suite,

$$(13)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\overline{OB}_{2n}} &= \frac{1}{\overline{OB}_0} + n\left(\frac{1}{\overline{O\Phi}} - \frac{1}{\overline{OF}}\right), \\ \frac{1}{\overline{OB}_{2n+1}} &= \frac{1}{\overline{OB}_1} - n\left(\frac{1}{\overline{O\Phi}} - \frac{1}{\overline{OF}}\right). \end{aligned} \right.$$

Pour un objet qui n'est pas placé en O, les quatre groupes d'images tendent vers le point asymptotique O; en même temps elles décroissent indéfiniment. Pour un objet placé en O, toutes les images se font en O et sont égales à l'objet; elles ne seraient toutes de même sens que dans le cas (peu intéressant) de deux miroirs se touchant par leurs sommets.

VIII. — Systèmes homofocaux et singuliers.

Dans les systèmes homofocaux, les deux divisions homographiques relatives à deux réflexions sont semblables; un des points doubles est rejeté à l'infini, le second est au foyer commun F. Les circonférences (F) et (Φ) sont concentriques. Il n'y a plus ni pôle, ni circonférence polaire. On voit immédiatement que

$$(14)\qquad \frac{\overline{FB}_{2n}}{\overline{FB}_0} = \left(\frac{\varphi^2}{f^2}\right)^n, \qquad \frac{\overline{FB}_{1+2n}}{\overline{FB}_1} = \left(\frac{\varphi^2}{f^2}\right)^n,$$

$$(15)\qquad \frac{I_{2n}}{I_0} = \pm\left(\frac{\varphi}{f}\right)^n, \qquad \frac{I_{1+2n}}{I_1} = \pm\left(\frac{\varphi}{f}\right)^n,$$

Soit μ le miroir de plus grande distance focale ($\varphi > f$).

Les images subissant la dernière réflexion sur m tendent vers le point asymptotique F en décroissant indéfiniment ($n < 0$); les images subissant la dernière réflexion sur μ s'éloignent indéfiniment en grandissant indéfiniment ($n > 0$). Pour un objet placé en F, toutes les images se font en F, mais diffèrent de grandeur; les images d'ordre impair sont infiniment éloignées et infiniment grandes.

Dans les systèmes singuliers, où les distances focales sont égales, en même temps que les foyers coïncident, les deux divisions homographiques relatives à deux réflexions sont identiques, les circonférences (F) et (Φ) coïncident. Quel que soit B_0, B_{2n} coïncide avec B_0, B_{1+2n} avec B_1. I_2 ne peut différer que par le sens de I_0; de même I_3 de I_1 (même sens si les miroirs sont d'espèce contraire, sens contraire s'ils sont de même espèce). $I_{n+4\mu}$ coïncide en tout cas avec I_n; chaque objet a donc au plus quatre images symétriques deux à deux par rapport à l'axe; il n'y aurait que deux images dans le cas (peu intéressant) où les miroirs sont d'espèce contraire (ils se toucheraient par leurs sommets).

IX. — Nombre des images.

En général, le nombre d'images d'un point ou d'un objet perpendiculaire à l'axe, données par un système de deux miroirs, est illimité. Ce nombre peut être limité, s'il se produit des coïncidences d'images.

Si un système de miroirs possède des points asymptotiques, le nombre des images d'un point de l'axe est illimité, sauf si le point coïncide avec l'un des points asymptotiques.

Les images d'un point qui diffère des points asymptotiques *tendent* vers l'un de ces points : elles sont donc en nombre illimité. Les images d'un point asymptotique sont l'un des points asymptotiques (*voir* VI, VII, VIII); il y en a donc *deux* pour les systèmes apériodiques et homofocaux, *une* pour les systèmes intermédiaires (l'objet étant compté).

Dans un système singulier (voir VIII), *tout point de l'axe a deux images (y compris l'objet) : elles coïncident pour les centres et sommets.*

Dans un système périodique, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point de l'axe ait un nombre limité d'images est que l'angle caractéristique ω *soit commensurable avec la circonférence. Si cette condition est satisfaite, tout point de l'axe a un nombre limité d'images.*

Si le nombre d'images est limité, on peut trouver une image de rang pair de B_0 qui coïncide avec B_0 : soit B_{2n}. D'après (10)

$$b_{2n} = b_0 + n\omega.$$

Si B_0 et B_{2n} coïncident, b_{2n} et b_0 diffèrent d'un nombre entier de demi-circonférences : donc $n\omega$ est un nombre entier de demi-circonférences et ω est commensurable avec la circonférence.

Inversement, si ω est commensurable avec la circonférence, on peut trouver n tel que $n\omega$ soit multiple de la demi-circonférence, mais alors, comme

$$b_{p+2n} = b_p + n\omega,$$

les images B_{p+2n} et B_p coïncideront : il y aura au plus $2n$ images d'un point quelconque de l'axe B_0.

Pour qu'un objet perpendiculaire à l'axe I_0 ait un nombre limité d'images, il est *nécessaire* que son pied sur l'axe B_0 ait un nombre limité d'images.

Dans les systèmes qui admettent des points asymptotiques, cela ne peut se produire que si B_0 en est l'un de ces points. Mais les images seront en nombre illimité, car elles ont toutes des grandeurs différentes (*voir* VI, VII, VIII) dans les systèmes apériodiques et homofocaux. Au contraire (*voir* VII), un objet placé au point asymptotique unique d'un système intermédiaire a *deux images* distinctes seulement, symétriques par rapport à l'axe (l'objet compté), *une seule* si les miroirs sont opposés par leurs sommets.

Dans les systèmes singuliers, tout objet a au plus quatre images distinctes (y compris l'objet); elles peuvent se réduire à une si les miroirs sont opposés par leurs sommets et l'objet placé en ce sommet (voir VIII).

Dans les systèmes périodiques, où l'angle caractéristique est commensurable avec la circonférence, tout objet a un nombre limité d'images.

Cette condition est nécessaire pour que le pied de l'objet ait un nombre limité d'images. Si elle est satisfaite, le nombre de *positions* des images est limité. Mais si deux images ont même position, elles sont égales, car le rapport de leurs grandeurs (règle V) est égal au rapport des distances de leurs pieds au pôle; elles ne peuvent différer que par le sens (elles ont même sens si $n\omega$ est un multiple de la circonférence, sens contraire si c'est un multiple impair de la demi-circonférence). En tout cas, le nombre des images d'un objet est au plus double de celui de son pied; il est donc limité.

Si l'on résout en nombres entiers l'équation

$$n\omega = 2k\pi,$$

la plus petite valeur de n, qui soit solution, indique une valeur maxima du nombre d'images d'un point, $2n$ une valeur maxima du nombre d'images d'un objet. Ce nombre est abaissé si des images de parité différente coïncident.

En résumé, *le nombre d'images est limité pour tout objet :* 1° dans les systèmes singuliers; 2° dans les systèmes périodiques où l'angle caractéristique est commensurable avec la circonférence.

X. — Effet de n réflexions.

$2n+1$ réflexions se faisant alternativement sur deux miroirs, m et μ, peuvent toujours se remplacer par une réflexion unique sur un miroir convenablement choisi.

En effet, un point B_0 de l'axe et son image B_{2n+1} déterminent sur l'axe deux divisions homographiques. Dans ces divisions, S et Σ sont des points correspondants, que l'on regarde S comme appartenant à l'une ou à l'autre; donc ces divisions sont en involution.

Le point central de cette involution est l'image F_{+2n} après $2n$ réflexions (la première sur m) du foyer F du miroir M. Comme F, il sera extérieur à $S\Sigma$.

On pourra alors remplacer les $2n+1$ réflexions par une réflexion unique sur un miroir de foyer F_{2n}, par rapport auquel S et Σ seraient conjugués. Il est clair que non seulement la position, mais la grandeur et le sens de l'image seront les mêmes.

Si le miroir unique est sphérique, son centre et son sommet coïncideront avec leurs images après $2n+1$ réflexions. Des objets placés en ces points auraient, l'un une image symétrique, l'autre une image identique.

Si le miroir unique est plan, l'objet coïncide avec l'image s'il est dans le plan; il est symétrique de l'image par rapport au plan; en général $2n$ réflexions pourraient être remplacées par deux réflexions.

Conclusions.

Nous nous sommes proposé d'étudier les réflexions multiples qui se produisent dans un système de deux miroirs sphériques. Ce problème correspond au problème des miroirs plans parallèles. Le cas d'un miroir sphérique et un miroir plan se déduirait de suite de notre étude.

Nous avons donné une classification des systèmes de miroirs fondée sur l'homographie, et montré comment les théories de l'involution et de l'homographie permettent de construire et de déterminer les éléments des images.

Enfin nous avons recherché les conditions pour que le nombre des images d'un point ou d'un objet soit limité.

Les systèmes donnant de *tout objet*, après un certain nombre de réflexions, une image coïncidant avec l'objet, *quelle que soit la position de cet objet,* seront les seuls donnant de *tout objet* un nombre d'images limité. On peut les définir ainsi :

Pour qu'un système de miroirs donne de tout objet un nombre limité d'images, il faut : 1° que l'on puisse construire un triangle ayant pour côtés les deux distances focales et la distance des foyers (ce triangle ne se réduisant pas à l'axe) ; 2° que l'angle de ce triangle, opposé à la distance des foyers, soit commensurable avec la circonférence.

NOTE.

Étant données deux divisions homographiques de même base, le rapport anharmonique de deux points correspondants M_1, M_2 *et des deux points doubles* E, F *est constant*

$$\frac{M_2E}{M_2F} : \frac{M_1E}{M_1F} = K.$$

Soient M_2, M_3, ..., M_{n+1} les points correspondants à M_1, M_2, ..., M_n

$$\frac{M_{n+1}E}{M_{n+1}F} : \frac{M_1E}{M_1F} = K^n.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que M_{n+1} coïncide avec M_1 (sans être en E ou F) est que K soit une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité. La coïncidence aura alors lieu quel que soit M_1.

Cela ne peut arriver que si les divisions sont identiques ($K = 1$) ou en involution ($K = -1$); ou si, ayant leurs points doubles imaginaires, elles peuvent être engendrées par des faisceaux homographiques de même centre, dont les rayons correspondants font un angle constant égal au $n^{\text{ième}}$ d'un multiple entier de $180°$.

Deux divisions homographiques répondant à ces conditions peuvent être considérées comme généralisation de deux divisions en involution. La transformation involutive répétée deux fois reproduit la figure primitive; la transformation homographique considérée, répétée n fois, la reproduit de même.

La division formée par les n points consécutifs correspondants M_1, M_2, ..., M_n, lorsque K est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, peut de même être regardée comme généralisation de la division harmonique. Quatre de ces points ont pour rapport anharmonique l'une des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, dans les mêmes conditions où les quatre points d'une division harmonique ont pour rapport anharmonique -1.

La considération de ces généralisations de l'involution et de la division harmonique semblerait indiquée dans les questions où l'on a à considérer des angles commensurables avec la circonférence ou des lignes polygonales qui se ferment. Un exemple :

Un angle inscrit à une conique et circonscrit à une deuxième conique, bitangente à la premiere, determine sur une tangente à la deuxieme deux divisions homographiques ayant pour points doubles les points d'intersection avec les tangentes communes et dans lesquelles le point de contact de la deuxieme conique correspond à l'un et l'autre des points d'intersection de la premiere Donc la condition necessaire et suffisante pour que l'on puisse inscrire et circonscrire aux deux coniques un même polygone de n cotes est que ces deux divisions homographiques soient des divisions generalisant des divisions en involution, K etant une racine n^{ieme} primitive de l'unite Il y aura alors une infinite de polygones de n côtes jouissant de la même propriete Toute tangente a la conique inscrite sera divisee par les côtes, suivant une division a n points generalisant la division harmonique, des droites convenablement choisies seraient divisees de meme par les diagonales