NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HENRI PICCIOLI

Sur quelques questions de la théorie des courbes à double courbure

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 508-511

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__508_1>

[M^4m]

SUR QUELQUES QUESTIONS DE LA THÉORIE DES COURBES A DOUBLE COURBURE;

PAR M. HENRI PICCIOLI.

On a cru jusqu'à présent que la courbe gauche nommée *hélice cylindro-conique* était placée sur un cône de révolution. Dans ce qui suit, nous nous proposons de montrer que ce n'est pas vrai, au moins dans le cas général. Les raisonnements que nous allons faire nous conduiront à trouver une formule d'où résultera tout de suite la vérité de notre assertion. Ceci formera l'objet du premier paragraphe de cette Note; dans le second, j'expose des propriétés relatives aux loxodromies et aux géodésiques du cône.

I.

Admettons que si A, B, C représentent les distances d'un point fixe de l'espace $P_0 \equiv (x_0 y_0 z_0)$ aux plans normal, rectifiant, osculateur d'une courbe gauche L dont s est l'arc, ρ et T les rayons de courbure, on a les formules

$$\frac{dA}{ds} = \frac{B}{\rho} - 1, \qquad \frac{dB}{ds} = -\frac{A}{\rho} - \frac{C}{T}, \qquad \frac{dC}{ds} = \frac{B}{T}.$$

Cela posé, soit $(\cos a, \cos b, \cos c)$ une direction fixe, et θ l'angle que les génératrices du cône, qui projette de P_0 la courbe L, font avec cette direction. Nous aurons

$$(x_0 - x] \cos a + (y_0 - y) \cos b + (z_0 - z) \cos c = l \cos\theta,$$

l représentant la portion de génératrice du cône comprise entre le sommet et le point (xyz) de la courbe.

En dérivant, on obtient

$$(1) \qquad \frac{dl}{ds}\cos\theta + l\frac{d\cos\theta}{ds} = -\cos\varphi,$$

φ étant l'angle de la direction fixe avec les tangentes de L.

Or on a

$$l = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

et par conséquent

$$\frac{dl}{ds} = -\frac{A}{l} = -\cos\psi,$$

ψ étant l'angle sous lequel la courbe L coupe les génératrices du cône.

En substituant dans (1) cette valeur, on trouve la formule

$$-\cos\theta\cos\psi + l\frac{d\cos\theta}{ds} = -\cos\varphi,$$

d'où il suit ce qu'on voulait; car, de l'hypothèse que φ et ψ soient constants, il ne résulte pas que θ aussi doit être constant.

Il en résulte en outre que la condition

$$\cos\varphi = \cos\theta \cos\psi \qquad (\theta \text{ const.})$$

est caractéristique pour les lignes placées sur le cône de révolution : ce qu'on peut aussi démontrer géométriquement.

II.

(A). Nous allons trouver une propriété caractéristique des loxodromies du cône. Partons pour cela de la formule

$$\cos\psi = \frac{A}{l},$$

où les quantités qui y figurent ont la même signification que plus haut. En dérivant et en posant dans cette dérivée $l\cos\psi$ à la place de A, on trouve

$$l\frac{d\cos\psi}{ds} = \frac{B}{\rho} - \sin^2\psi.$$

Si ψ est constant, il en résulte

$$B = \rho\sin^2\psi,$$

c'est-à-dire que :

Le long d'une loxodromie du cône, la distance du plan rectifiant au sommet est proportionnelle au rayon de première courbure. Le coefficient de proportionnalité est une quantité comprise entre zéro et l'unité.

Au moyen de cette propriété, on pourrait, d'une manière très simple, écrire l'équation intrinsèque des loxodromies du cône, et en déduire les équations de l'hélice cylindro-conique en y ajoutant la condition

$$\frac{\rho}{T} = \cot\varphi \qquad (\varphi \text{ const.}).$$

(B). Pour arriver à la recherche de la propriété des géodésiques du cône, étudions les courbes pour lesquelles la distance des tangentes à un point fixe est constante.

On aura donc

$$B^2 + C^2 = \text{const.}$$

En dérivant, on trouve les conditions

$$A = 0, \qquad \frac{1}{\rho} = 0, \qquad B = 0.$$

Le premier cas correspond aux lignes sphériques, ce qui ne donne rien de nouveau, de même que le second, où il s'agit d'une droite. Le dernier cas correspond aux géodésiques du cône [1].

Il s'ensuit que :

Hormis les lignes sphériques, il n'y a, parmi les courbes à double courbure, que les géodésiques du cône qui jouissent de la propriété que leurs tangentes soient à la même distance d'un point fixe (*sommet du cône*).

On peut aussi énoncer ce résultat sous cette forme :

Les podaires des géodésiques du cône sont des lignes sphériques.

Ces théorèmes subsistent même dans l'espace à n dimensions.

---

(1) *Voir* ma *Note sur les géodésiques du cône* (ce Journal, 1898).