NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ED. COLLIGNON

Problèmes divers sur la méthode inverse des tangentes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 488-508

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__488_0>

[O2b]

PROBLÈMES DIVERS SUR LA MÉTHODE INVERSE DES TANGENTES;

PAR M. ED. COLLIGNON.

LE PROBLÈME DE M. DE BEAUNE.

On lit dans l'*Aperçu historique* de Chasles (¹) : « C'est de Beaune qui, le premier, conçut l'idée d'introduire dans la théorie des courbes les propriétés de leurs tangentes comme élément propre à leur construction, et qui, par une question de cette nature proposée à Descartes, donna naissance à la *méthode inverse des tangentes*. Il s'agissait de construire une courbe telle que le rapport de sa sous-tangente à l'ordonnée fût dans une raison constante avec la partie de l'ordonnée comprise entre la courbe et la bissectrice de l'angle des axes ».

La méthode inverse des tangentes revient à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre. L'équation à intégrer pour résoudre le problème posé par de Beaune est

$$(1)\qquad \frac{dx}{dy} = \frac{y - x}{a},$$

désignant une longueur donnée. Le problème reste le même, au point de vue analytique, si l'on substitue à la bissectrice de l'angle des axes une droite quelconque, $y = bx + h$. On reconnaît aisément, en effet, que la positoin de l'origine O n'influe en rien sur la courbe cherchée, et qu'ainsi l'on peut la placer à l'intersection

(¹) Page 96 Bruxelles, 1837.

de la droite donnée avec l'axe des abscisses, ce qui réduit à zéro l'ordonnée h. Étant donnée l'équation

$$(2) \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{y - bx}{a},$$

on peut, par un changement de variable, la ramener à la forme (1). Posons, en effet,

$$bx = x',$$

relation d'où l'on déduit $dx = \frac{dx'}{b}$; l'équation différentielle prend la forme

$$\frac{dx'}{b\,dy} = \frac{y - x'}{a},$$

ou bien

$$\frac{dx'}{dy} = \frac{y - x'}{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{y - x'}{a'}.$$

Par conséquent, la transformation équivaut à la substitution d'une nouvelle quantité constante $a' = \frac{a}{b}$ à la quantité donnée a, sauf à effacer le coefficient de l'abscisse x.

On peut simplifier de même l'équation (1), en remplaçant les quantités variables x et y par leurs rapports x' et y' à la quantité constante a, prise comme unité de mesure. Il vient, en effet,

$$(3) \qquad \frac{dx'}{dy'} = y' - x',$$

équation dont l'intégrale fera connaître, par des transformations convenables, l'intégrale de l'équation (1) et celle de l'équation (2).

Cette équation (3) à laquelle on ramène les deux autres, est une équation linéaire et du premier ordre, en y considérant y' comme la variable indépendante, et

x' comme la fonction inconnue. Posons

$$\frac{dx'}{dy'} + x' = y'.$$

On voit tout de suite qu'on satisfera à l'équation en posant $x' = y' - 1$, ce qui donne une solution particulière de l'équation avec son second membre. D'ailleurs, l'équation réduite à son premier membre a pour intégrale générale

$$x' = Ce^{-y'}.$$

Donc, enfin, l'intégrale générale de l'équation (3) est

$$x' = Ce^{-y'} + y' - 1,$$

avec une constante arbitraire C.

On passera de là à l'intégrale générale de l'équation (1) en remplaçant x' par $\frac{x}{a}$, y' par $\frac{y}{a}$; puis à celle de l'équation (2) en remplaçant x par bx, et a par $\frac{a}{b}$. Il viendra

$$x = aCe^{-\frac{y}{a}} + y - a$$

pour l'équation (1),

$$x = \frac{a}{b^2}Ce^{-\frac{by}{a}} + \frac{y}{b} - \frac{a}{b^2}$$

pour l'équation (2).

Sous cette forme, on reconnaît sur-le-champ que les courbes cherchées ont pour asymptote la droite

$$y = bx + \frac{a}{b},$$

parallèle à la droite donnée, et écartée d'elle à la distance $\frac{a}{b}$ mesurée sur l'axe des y.

On peut arriver à une équation différentielle plus simple encore en changeant de coordonnées. Soit O' le point où l'asymptote $y = bx + \frac{a}{b}$ rencontre l'axe OY ([1]); par ce point menons une droite $O'\eta$ parallèle à OX. Nous prendrons pour nouveaux axes les droites $O'\xi$, asymptote à la courbe, et $O'\eta$, parallèle à OX ; soit φ l'angle de ces deux axes, angle dont la tangente trigonométrique sera égale à b, si nous supposons les axes primitifs rectangulaires. Les formules de transformation seront

$$x = \xi \cos\varphi + \eta,$$

$$y = \xi \sin\varphi + \frac{a}{b};$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dx}{dy} = \cot\varphi + \frac{d\eta}{d\xi \sin\varphi} = \frac{1}{b} + \frac{\sqrt{1+b^2}}{b}\frac{d\eta}{d\xi},$$

$$y - bx = \xi \sin\varphi + \frac{a}{b} - (\xi \sin\varphi + \eta \operatorname{tang}\varphi) = \frac{a}{b} - b\eta,$$

valeurs qui, substituées dans l'équation (3), la réduisent à la forme

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{b^2}{a\sqrt{1+b^2}}\eta.$$

La séparation des variables s'opère immédiatement, et l'on obtient pour équation finale

$$\eta = Ce^{-\frac{b^2}{a\sqrt{1+b^2}}\xi}.$$

La courbe est donc une exponentielle rapportée à des axes obliques $O'\xi$, $O'\eta$. Si par un point M de la courbe on mène l'ordonnée $MR = \eta$ jusqu'à la rencontre de l'asymptote $O'\xi$, puis la tangente MT jusqu'à la même droite, la sous-tangente RT mesurée sur l'asymptote a une longueur constante et égale à $\frac{a\sqrt{1+b^2}}{b^2}$. On revient

---

([1]) Le lecteur est prié de faire les figures.

au problème de M. de Beaune, en faisant $b = 1$, et la valeur constante de la sous-tangente RT est alors égale à $a\sqrt{2}$.

On reconnaît aisément, en faisant la figure, que la droite MR, parallèle à OX, prolongée et l'ordonnée TP′, parallèle menée à OY par le point T où la tangente MT coupe l'asymptote, se rencontrent en un point K appartenant à la droite donnée $y = bx$. Le triangle RKT, rectangle en K, est constant pour tous les points de la courbe; ses côtés sont

$$\mathrm{KT} = \frac{a}{b}, \qquad \mathrm{RK} = \frac{a}{b^2}, \qquad \mathrm{RT} = \frac{a\sqrt{1+b^2}}{b^2}.$$

Lorsque le point M se déplace sur la courbe en entraînant le côté RK, l'hypoténuse RT glisse le long de l'asymptote, pendant que le sommet K de l'angle droit glisse le long de la droite donnée.

L'équation différentielle de la courbe

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y - bx}{a},$$

mise sous la forme

$$\frac{y\,dy}{dx} = \frac{ay}{y - bx},$$

fait voir que la *sous-normale de la courbe, prise sur une parallèle à* OX *menée par le point* M′ *où l'ordonnée* MP *rencontre la droite donnée, est constante et égale à a*.

Cette proposition subsiste encore lorsqu'on remplace la droite donnée, $y = bx$, par une courbe quelconque, $y = f(x)$; car de l'équation

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y - f(x)}{a},$$

on déduit toujours

$$\frac{y\,dy}{dx} = \frac{ay}{y - f(x)}.$$

Le premier membre représente la sous-normale PN prise sur l'axe OX. Le dénominateur du second membre est la différence MM' des ordonnées des deux courbes, et si par le point M' on mène une parallèle M'C à l'axe OX jusqu'au point C où elle coupe la normale MN, on aura la proportion

$$\frac{\mathrm{PN}}{\mathrm{M'C}} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MM'}}.$$

Donc

$$\mathrm{M'C} = \frac{\mathrm{PN} \times \mathrm{MM'}}{\mathrm{MP}} = \frac{y\,dy}{dx} \times \frac{[y - f(x)]}{y} = a.$$

Il résulte de là que *le lieu des points* C, *obtenus pour tous les points* M *de la courbe, est la courbe* $y = f(x)$ *elle-même, déplacée de la quantité* a *parallèlement à l'axe* OX.

Revenons à la courbe qui satisfait à la relation différentielle

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y - bx}{a},$$

pour laquelle le lieu du point C sera la droite $y = b(x - a)$. Le triangle MKT est semblable au triangle MM'C, les côtés de ces deux triangles étant respectivement perpendiculaires. On a, par conséquent,

$$\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MT}} = \frac{\mathrm{M'C}}{\mathrm{KT}} = \frac{a}{\left(\frac{a}{b}\right)} = b.$$

Si donc on joint TC, l'angle CTM a pour tangente trigonométrique la quantité b, c'est-à-dire qu'il est constant et égal à l'angle de la droite donnée avec l'axe OX. On a en définitive ce théorème :

Du point de rencontre T *de la tangente avec l'asymptote, la portion de normale* MC *vue sous l'angle* φ *dont la tangente est* b, *a pour extrémité* C *un point situé sur la droite* D′D′ *parallèle à la droite donnée* OD.

En d'autres termes, le triangle MTC, rectangle en M, mobile et déformable quand le point M suit la courbe, reste constamment semblable au triangle M′PO, formé par l'ordonnée, l'axe OX et la droite donnée OD.

Il n'est pas inutile de faire voir que l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y - bx}{a}$$

peut s'intégrer directement, sans passer par les réductions que nous lui avons fait subir. Faisons $\frac{dy}{dx} = p$, et résolvons par rapport à l'ordonnée y. Il vient

$$y = bx + \frac{a}{p}.$$

Différentions et remplaçons dy par pdx. Nous aurons

$$p\,dx = b\,dx - \frac{a}{p^2}\,dp,$$

équation où les variables se séparent immédiatement. On a, en effet, en résolvant par rapport à dx,

$$dx = \frac{a\,dp}{p^2(b-p)} = \frac{a}{b^2}\frac{dp}{p} + \frac{a}{b}\frac{dp}{p^2} + \frac{a}{b^2}\frac{dp}{b-p};$$

puis l'intégration donne

$$x = \mathrm{C} - \frac{a}{bp} + \frac{a}{b^2}\,l\left(\frac{p}{b-p}\right),$$

et, par conséquent,

$$y = b\mathrm{C} + \frac{a}{b}\,l\left(\frac{p}{b-p}\right).$$

Si l'on élimine p entre ces deux équations, il vient

$$x = \frac{y}{b} - \frac{a}{b^2} - \mathrm{C}'e^{-\frac{b}{a}y},$$

en remplaçant par une nouvelle constante, C′, le produit $\frac{a}{b^2} e^{\frac{b^2 C}{a}}$; cette équation est identique à celle que nous avons obtenue plus haut.

Nous allons chercher le rayon de courbure de la courbe, déduit de son équation différentielle. La marche à suivre s'applique identiquement à la courbe plus générale qui serait représentée par l'équation

$$(1) \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{y - f(x)}{a},$$

lorsque la droite du problème primitif est remplacée par une courbe quelconque.

De cette équation, mise sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{a}{y - f(x)},$$

on déduit, en prenant la dérivée des deux membres par rapport à x,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} = q &= \frac{-a\left[\frac{dy}{dx} - f'(x)\right]}{[y - f(x)]^2} \\ &= \frac{-a\{a - [y - f(x)]f'(x)\}}{[y - f(x)]^3}; \end{aligned}$$

et, par conséquent, on a pour le rayon de courbure ρ

$$\rho = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = -\frac{\{[y - f(x)]^2 + a^2\}^{\frac{3}{2}}}{a\{a - f'(x)[y - f(x)]\}}.$$

Soient AB la courbe cherchée, M le point pour lequel on cherche le rayon de courbure; soient FG la courbe donnée $y = f(x)$, et M′ le point de cette courbe qui correspond à l'abscisse x. Si l'on mène la normale MC et, par le point M′, la droite M′C parallèle à OX, on sait qu'on a M′C $= a$.

La différence $y - f(x)$ est représentée sur la figure par le segment MM′; $M'C = a$ et MM′ sont les côtés de l'angle droit dans le triangle MM′C, dont l'hypoténuse est la normale MC. On a donc

$$\overline{MC}^2 = [y - f(x)]^2 + a^2,$$

de sorte que le numérateur de la valeur de ρ est représenté par $\overline{MC}^3$.

Du point M abaissons MC′ perpendiculaire sur la tangente M′T′ menée à la courbe $y = f(x)$, et soit C′ le point où elle rencontre la droite M′C. Nous aurons

$$M'C' = MM' \operatorname{tang}(C'MM') = MM'f'(x) = f'(x)[y - f(x)],$$

et la différence

$$a - f'(x)[y - f(x)] = MC - M'C' = CC';$$

d'où résulte la formule

$$\rho = -\frac{\overline{MC}^3}{a \times CC'}.$$

On peut aisément trouver sur la figure une droite qui soit égale en valeur absolue au rayon ρ. Soit T le point où la tangente MT à la courbe AB coupe la droite CM′ parallèle à OX. On aura dans le triangle CMT, rectangle en M, et dans lequel MM′ est perpendiculaire à l'hypoténuse CT,

$$\overline{MC}^2 = M'C \times CT = a \times CT.$$

Donc

$$\frac{\overline{MC}^2}{a} = CT,$$

ce qui transforme l'expression du rayon de courbure en celle-ci :

$$\rho = \frac{MC \times CT}{CC'}.$$

Par le point T menons une droite TT′, perpendicu laire à la tangente M'T', c'est-à-dire parallèle à MC', et prolongeons-la jusqu'à la rencontre en S avec la normale CM prolongée. Les parallèles MC', ST nous donneront la proportion

$$\frac{CS}{CM} = \frac{CT}{CC'};$$

donc

$$CS = \frac{MC \times CT}{CC'} = -\rho.$$

Le segment CS, déterminé sur la normale par la rencontre de TT', est en valeur absolue la longueur du rayon de courbure. De cette construction résultent plusieurs conséquences :

1° Si au point M la tangente MT est parallèle à la tangente M'T' menée au point M' à la courbe $y = f(x)$, les droites TT' et MC sont parallèles, et le rayon ρ devient infini. La courbure est nulle en ce point M;

2° Au point où la courbe cherchée AB coupe la courbe donnée $y = f(x)$, le segment MM' est nul, et l'on a $\rho = a$. En ce point la tangente MT à la courbe cherchée est parallèle à OY.

Lorsque la fonction $f(x)$ est linéaire, elle peut être représentée par bx, et la formule générale prend une forme plus simple. On a, en effet,

$$\rho = -\frac{[(y - bx)^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}}{a[a - b(y - bx)]} = \frac{[(y - bx)^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}}{ab\left[\frac{a}{b} - (y - bx)\right]}.$$

Le numérateur est toujours égal à $\overline{MC}^3$. Quant au dénominateur, $\frac{a}{b}$ est la distance M'm comprise, sur l'ordonnée du point M, entre la droite donnée $y = bx$ et l'asymptote $y = bx + \frac{a}{b}$; de sorte que la différence

$\frac{a}{b} - (y - bx)$ représente la différence

$$M'm - MM' = Mm,$$

c'est-à-dire le segment compris entre la courbe et l'asymptote. Il vient donc

$$\rho = -\frac{\overline{MC}^3}{ab \times Mm},$$

relation que nous aurons l'occasion d'employer tout à l'heure.

L'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{y - f(x)}{a}$$

ne peut être intégrée par les méthodes qui réussissent lorsque la fonction $f(x)$ est une fonction linéaire de l'abscisse. Remarquons que, dans ce cas plus général, on peut tourner la difficulté en considérant les trajectoires orthogonales des courbes comprises dans l'équation (1). Pour avoir l'équation différentielle de ces courbes, il suffit de changer $\frac{dx}{dy}$ en $-\frac{dy}{dx}$ dans l'équation proposée, ce qui donne

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{y - f(x)}{a}.$$

La transformation revient donc à changer $\frac{dx}{dy}$ en $\frac{dy}{dx}$, en changeant en même temps le signe de a. Or, l'équation (1) est une équation linéaire du premier ordre, dont l'équation intégrale peut s'écrire immédiatement. On a, en effet, pour l'intégrale générale,

$$(3) \qquad y = Ce^{-\frac{x}{a}} + \frac{1}{a} e^{-\frac{x}{a}} \int e^{\frac{x}{a}} f(x)\, dx.$$

Il est facile de reconnaître que ces courbes satisfont à la condition de donner une sous-tangente constante, et égale à $-a$, la sous-tangente étant prise, non sur l'axe OX, mais sur une parallèle à cet axe menée par le point M' où l'ordonnée de la courbe cherchée coupe la courbe donnée $y=f(x)$.

Les courbes (3) une fois tracées sur le plan, il suffira de mener leurs trajectoires orthogonales pour obtenir les courbes qui satisfont à l'équation (1); cette opération se fait facilement : c'est celle que l'on exécute pour tracer les lignes de plus grande pente d'une surface topographique définie par ses lignes de niveau.

Remarques sur les courbes représentées par l'équation

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y-f(x)}{a}.$$

1. Posons $f(x)=y'$, et écrivons l'équation sous la forme

$$(y-y')\,dy=a\,dx.$$

Imaginons qu'on déplace la courbe donnée FG, représentée par l'équation $y'=f(x)$, de la quantité a parallèlement à l'axe OY; l'aire élémentaire comprise entre les deux positions de la courbe et entre les ordonnées correspondantes aux abscisses x et $x+dx$, aura pour mesure $a\,dx$; l'aire totale comprise entre les deux positions de FG et les ordonnées de deux points A et B pris sur la courbe cherchée, sera exprimée par l'intégrale

$$\int_A^B a\,dx=a(x_1-x_0),$$

en appelant x_0 et x_1 les abscisses des points A et B.

En chaque point M de la courbe cherchée prenons sur une parallèle à OX une quantité égale à

$$MM'=y-y',$$

différence des ordonnées des deux courbes; l'extrémité du segment ainsi formé sera un point μ, qui décrira un certain lieu $\alpha\mu\beta$, quand le point M suivra la courbe cherchée de A à B; et l'aire élémentaire comprise entre les deux courbes et les deux horizontales correspondantes aux ordonnées y et $y + dy$, aura pour mesure $(y - y')\,dy$. L'aire totale comprise entre les deux courbes et les horizontales des points A et B sera exprimée par l'intégrale

$$\int_A^B (y - y')\,dy.$$

L'équation différentielle nous fait voir, par conséquent, que ces deux aires sont égales, et que la seconde aire $A\alpha\beta B$ croît proportionnellement à l'abscisse.

Si l'on suppose $y' = 0$, c'est-à-dire si l'on prend pour courbe donnée FG l'axe OX lui-même, la courbe cherchée AB devient la parabole

$$y^2 = 2ax,$$

et la courbe $\alpha\beta$ qu'on en déduit en portant, en chaque point M une longueur horizontale $M\mu = y$, est une autre parabole

$$y^2 = 2a(x - y).$$

La propriété qu'on vient d'établir montre que l'aire $A\alpha\beta B$ comprise entre deux parallèles à l'axe de la courbe est proportionnelle à la différence des abscisses, x_1 et x_0, des points extrêmes A et B pris sur la première parabole.

Lorsqu'on part de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - f(x)}{a}.$$

on parvient de même à une équivalence d'aires,

$$\int_{A}^{B} a\,dy = \int_{A}^{B} [y - f(x)]\,dx,$$

dont l'interprétation est plus simple.

2. Toutes les courbes AB représentées par l'équation générale

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y - f(x)}{a}$$

sont telles que la sous-normale M′C, prise sur une parallèle à l'axe OX menée par le point M′ où la courbe donnée FG rencontre l'ordonnée MP du point M, est constante et égale à a.

Il résulte de cette propriété que chacune des courbes AB peut être regardée comme l'enveloppe des positions successives d'une parabole MI, de paramètre $2a$, qui recevrait un mouvement de translation dans le plan des axes. La parabole mobile aurait son axe parallèle à OX, son sommet I serait situé sur la droite CM′ prolongée, au milieu du segment M′S déterminé sur cette droite par la tangente MS menée à la courbe. Si l'on appelle p le rapport $\frac{dy}{dx}$, et x_1, y_1 les coordonnées du sommet I, on aura

$$x_1 = x - \frac{a}{2p^2},$$
$$y_1 = f(x).$$

Dans le cas particulier où la ligne donnée FG est une droite $y = bx$, on aura pour les coordonnées du sommet I de la parabole, tangente de M à la courbe cherchée,

$$x_1 = C - \frac{a}{bp} - \frac{a}{2p^2} + \frac{a}{b^2}\,l\left(\frac{p}{b-p}\right),$$
$$y_1 = bC - \frac{a}{p} + \frac{a}{b}\,l\left(\frac{p}{b-p}\right).$$

Nous avons trouvé plus haut, dans le cas particulier où la fonction $f(x)$ est linéaire,

$$\rho = -\frac{\overline{\text{MC}}^3}{ab \times \text{M}m}.$$

La parabole tangente à la courbe au point M a pour axe de figure la droite M′C; la droite MC lui est normale et a est son demi-paramètre. On a donc pour le rayon de courbure ρ_1 de cette parabole

$$\rho_1 = -\frac{\overline{\text{MC}}^3}{a^2}.$$

On en déduit pour le rapport des deux rayons de courbure des courbes tangentes en M,

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{a^2}{ab \times \text{M}m} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\text{M}m} = \frac{\text{M}'m}{\text{M}m};$$

car $\frac{a}{b}$ est l'intervalle parallèle à OY compris entre l'asymptote et la droite donnée. Au point où la courbe AB coupe la droite donnée, on a $\text{M}m = \frac{a}{b} = \text{M}'m$, et, par conséquent, $\rho = \rho_1$. La parabole et la courbe sont osculatrices.

3. La courbe cherchée AB peut être regardée, dans le cas général, comme engendrée par un point M lié invariablement à une courbe qui roulerait sur la courbe fg, déduite de la courbe FG par un déplacement égal à a, parallèle à l'axe OX; cette courbe fg est, en effet, le lieu des points C tels que CM soit la normale à la courbe AB. Pour trouver l'équation polaire de la courbe roulante, nous considérerons le point décrivant M comme le pôle, $\text{MC} = r$ comme le rayon vecteur, et θ désignera l'angle polaire; si l'on appelle μ l'angle

compris entre le rayon vecteur MC et la tangente Ct menée au point C à la courbe fg, on aura

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{r\,d\theta}{dr}.$$

Mais les courbes fg et FG étant parallèles et déduites l'une de l'autre par une simple translation parallèle à OX, les tangentes en C et M′ aux deux courbes sont parallèles, et l'angle μ est l'angle que fait la direction $-\frac{dx}{dy}$ de la normale MC avec la direction $f'(x)$ de la tangente à FG. On a donc

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{f'(x) + \frac{dx}{dy}}{1 - f'(x)\frac{dx}{dy}} = r\,\frac{d\theta}{dr},$$

équation où l'on remplacera y et $\frac{dx}{dy}$ en fonction de x. On a d'ailleurs

$$r = \sqrt{(\mathrm{MM}')^2 + (\mathrm{MC})^2} = \sqrt{[y - f(x)]^2 + a^2},$$

où l'on remplacera aussi y par sa valeur en x. L'élimination de x entre ces deux équations conduira à une équation différentielle, qui définira θ en fonction de r, et définira la courbe roulante.

Lorsque $f(x) = bx$, il vient successivement, en exprimant toutes les variables en fonction de la dérivée $p = \frac{dy}{dx}$,

$$r = \frac{a\sqrt{1+p^2}}{p},$$

$$\frac{r\,d\theta}{dr} = \frac{1+bp}{p-b}$$

et

$$\theta = \theta_0 + \operatorname{arc\,tang} p + \frac{1}{b}\,l\left(\frac{p}{p-b}\right),$$

équations qui définissent la courbe roulante.

Problèmes connexes.

On peut rattacher au problème de M. de Beaune une série de questions relatives à la transformation des courbes ou à la formation de courbes associées suivant une loi particulière. Ces diverses questions peuvent être réparties en trois classes principales :

Première classe. — Étant donnée une courbe $y' = f(x)$, trouver une courbe (y, x) telle que l'on ait en tout point l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y - y'}{a}, \tag{1}$$

a étant une longueur donnée constante. C'est le problème dont nous venons de nous occuper.

Deuxième classe. — Étant donnée une courbe $y = F(x)$, trouver la courbe $y' = f(x)$ qui satisfera à la même équation (1). La solution est immédiatement donnée par l'équation

$$y' = y - a\frac{dx}{dy} = F(x) - \frac{a}{F'(x)}.$$

Troisième classe. — Sans donner aucune courbe, on impose aux deux ordonnées y, y', qui répondent à une même abscisse x, une relation déterminée $y' = \varphi(y)$, la fonction φ étant donnée. Il viendra

$$x = \frac{y^2}{2a} - \frac{1}{a}\int \varphi(y)\,dy,$$

et la solution sera connue par une quadrature. Il est inutile d'ajouter une constante; car l'origine est arbitraire sur l'axe des abscisses, et cette constante ne ferait que déplacer la courbe le long de l'axe, sans influer sur sa forme.

Nous examinerons à part quelques cas particuliers de cette dernière classe de questions.

1° *Rapport constant h entre les deux ordonnées*; $y' = hy$. — On aura pour la courbe cherchée

$$x = \frac{y^2}{2a}(1-h),$$

et pour la courbe associée

$$x = \frac{y'^2(1-h)}{2ah^2}.$$

Les deux courbes sont donc des paraboles de même axe et de même sommet.

2° *Différence constante f entre les deux ordonnées*; $y - y' = f$. — On obtiendra deux droites parallèles

$$ax = fy,$$
$$ax = fy' + f^2.$$

3° *Somme constante $2f$ des deux ordonnées*; $y + y' = 2f$. — On parviendra à la relation

$$x = \frac{y^2 - 2fy + C}{a},$$

où C désigne une constante, qu'on peut faire égale à f^2. On aura donc

$$x = \frac{(y-f)^2}{a},$$

et la courbe associée sera, en remplaçant y par $2f - y'$,

$$x = \frac{(f-y')^2}{a},$$

équation identique à la précédente, et qui montre que la parabole, ayant pour axe la droite $y = f$, est à elle-même sa courbe associée. La sous-normale est constante, mesurée sur l'axe, et égale à $\frac{1}{2}a$. Mesurée à la hauteur du point M' où l'ordonnée MP recoupe la parabole; elle sera double et égale à a; et la somme des deux ordonnées y, y' sera égale à $2f$.

4° *Produit constant des ordonnées;* $yy' = f^2$. — On aura

$$y' = \frac{f^2}{y}$$

et

$$y - y' = y - \frac{f^2}{y}.$$

L'intégration donne pour la courbe (y, x)

$$x = \frac{y^2}{2a} - \frac{f^2}{a} l\left(\frac{y}{a}\right),$$

et la courbe associée est celle qu'on déduit de la courbe (x, y) en opérant la transformation *par ordonnées réciproques,* $y' = \frac{f^2}{y}$, ce qui donne pour son équation

$$x = \frac{f^4}{2ay'^2} - \frac{f^2}{a} l\left(\frac{f^2}{ay'}\right).$$

5° *Somme des carrés constante;* $y^2 + y'^2 = f^2$. — On aura

$$y' = \sqrt{f^2 - y^2},$$
$$dx = \frac{y - \sqrt{f^2 - y^2}}{a} dy.$$

Si l'on pose $y = f \sin\varphi$, on trouvera pour l'équation de la courbe cherchée

$$ax = \tfrac{1}{2} f^2 (\sin^2\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi - \varphi),$$

équation qu'on rapprochera successivement des équations

$$y = f \sin\varphi,$$
$$y' = f \cos\varphi,$$

pour avoir les courbes associées.

6° *Différence des carrés constante*; $y^2 - y'^2 = f^2$. — Il vient

$$y' = \sqrt{y^2 - f^2}$$

et

$$dx = \frac{f^2\,dy}{a(y + \sqrt{y^2 - f^2})}.$$

L'ordonnée y devant être supérieure à f en valeur absolue, nous ferons

$$y = \frac{f}{\cos\varphi}.$$

La substitution conduit à l'équation différentielle

$$dx = \frac{f^2}{a}\,\frac{\operatorname{tang}\varphi\,d\varphi}{1 + \sin\varphi},$$

en supprimant le facteur $\frac{f}{\cos\varphi}$ aux deux termes de la fraction. On peut ramener cette fonction à une fraction rationnelle en posant $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = u$. On en déduit

$$\sin\varphi = \frac{2u}{1 + u^2}, \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{2u}{1 - u^2}, \qquad d\varphi = \frac{2\,du}{1 + u^2},$$

et enfin

$$dx = \frac{f^2}{a}\,\frac{4u\,du}{(1 - u)(1 + u)^3}.$$

On fera la décomposition de la fraction donnée en fractions simples, ce qui donne

$$dx = \frac{f^2}{a}\left[\frac{1}{2}\,\frac{du}{1 - u} - \frac{2\,du}{(1 + u)^3} + \frac{du}{(1 + u)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{du}{1 + u}\right]$$

et, par conséquent, en intégrant,

$$x = \frac{f^2}{a}\left[\frac{1}{2}\,l\left(\frac{1 + u}{1 - u}\right) + \frac{1}{(1 + u)^2} - \frac{1}{1 + u}\right].$$

Remplaçons u par $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$; nous aurons pour l'équation de la courbe (x, y) les deux relations

$$x = \frac{f^2}{a}\left[l\sqrt{\frac{1+\tang\frac{\varphi}{2}}{1-\tang\frac{\varphi}{2}}} - \frac{\tang\frac{\varphi}{2}}{\left(1+\tang\frac{\varphi}{2}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{f^2}{a}\left[l\sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{\cos 2\varphi}} - \frac{\tang\frac{\varphi}{2}}{\left(1+\tang\frac{\varphi}{2}\right)^2}\right],$$

$$y = \frac{f}{\cos\varphi}.$$

La courbe conjuguée sera représentée par la première de ces deux équations, jointe à la relation

$$y' = \sqrt{\frac{f^2}{\cos^2\varphi} - f^2} = f\tang\varphi.$$