NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 473-484

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__473_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1740.

(1896, p. 392 et 1899, p. 335.)

Note par M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Dans sa réponse à la question 1740 (*Nouvelles Annales*, juillet 1899), M. Boulanger est loin de faire connaître toutes les quadriques orthogonales à un ellipsoïde donné. Il dit avec raison que le premier membre $f(x, y, z)$ de l'équation d'une de ces quadriques doit vérifier une identité de la forme

$$(1)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{a^2}+\mu\right)xf'_x+\ldots+\frac{1}{2}\mu t f'_t\,;$$

mais il a tort d'en conclure que f ne doit renfermer ni rectangles, ni termes du premier degré. Soit

$$f(x, y\, z)\equiv A x^2+A' y^2+A'' z^2+2Byz+\ldots+2C''z+D\,;$$

l'identité (1) entraîne dix équations que je répartis en deux groupes :

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{ll}\left(\dfrac{\lambda}{a^2}+\mu\right)A=\dfrac{1}{a^2}, & \left(\dfrac{\lambda}{b_2}+\mu\right)A'=\dfrac{1}{b^2},\\[2ex] \left(\dfrac{\lambda}{c^2}+\mu\right)A''=\dfrac{1}{c^2}, & \mu D=-1;\end{array}\right.$$

$$(3)\quad \left(\frac{\lambda}{b^2}+\frac{\lambda}{c^2}+2\mu\right)B=0,\quad \ldots,\quad \left(\frac{\lambda}{a^2}+2\mu\right)C=0,\quad \ldots.$$

Pour des valeurs quelconques de λ et de μ, les équations (3) exigent que B, B', B'', C, C', C'' soient nuls; on trouve alors, à l'aide des équations (2), le faisceau de quadriques homofocales signalé par l'Auteur. Mais il n'en est plus de même si l'on établit entre λ et μ des relations convenables. Soit d'abord $\mu=-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{b^2}+\frac{\lambda}{c^2}\right)$: la première équation (3) sera satisfaite sans que B soit nul; les équations (2) donnent A, A', A'', D, et, en remplaçant B par $\frac{2B_1 b^2c^2}{\lambda}$, on aura un faisceau de quadriques orthogonales à l'ellipsoïde, dont on peut mettre les équations sous la forme

$$\frac{x^2}{2b^2c^2-a^2(b^2+c^2)}+\frac{y^2}{b^2(c^2-b^2)}+\frac{z^2}{c^2(b^2-c^2)} + 2B_1yz-\frac{1}{b^2+c^2}=0.$$

On aurait deux faisceaux analogues contenant des termes en zx ou en xy.

Faisons maintenant $\mu=-\frac{\lambda}{2a^2}$: la quatrième équation (3) est vérifiée sans que C soit nul; les équations (2) donnent les valeurs correspondantes de A, A′, A″, D et l'on trouve un nouveau faisceau de quadriques orthogonales dont les équations ont la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2a^2-b^2}+\frac{z^2}{2a^2-c^2}+2C_1x+1=0.$$

On aurait deux autres faisceaux analogues.

Pour les quadriques orthogonales au paraboloïde

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0,$$

on trouve, par une analyse semblable, le faisceau des paraboloïdes homofocaux, et trois autres faisceaux de paraboloïdes définis par des équations de la forme

$$\frac{x^2}{p(q-p)}+\frac{y^2}{q(p-q)}+2B_1xy+\frac{2z}{p+q}-\frac{2pq}{(p+q)^2}=0,$$

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{2p-q}+2C_1x+2z-2p=0,$$

$$\frac{x^2}{2q-p}+\frac{y^2}{q}+2C'_1y+2z-2q=0.$$

Il sera facile de compléter cette analyse.

Question 1739.

(1895, p. 392; 1899, p. 384.)

On donne une ellipse de centre o. On mène une corde quelconque ab et l'on prend son pôle c par rapport à l'ellipse. Le point p étant la projection sur oc de l'orthocentre h du triangle abc, démontrer que le produit op par oc est égal à la somme des carrés des demi-axes de l'ellipse donnée. (Mannheim.)

AUTRES SOLUTIONS GÉOMÉTRIQUES,

Par M. Mannheim.

Les droites ca, co, cb et la parallèle à ab menée du point c, forment un faisceau harmonique. Les perpendiculaires à ces droites, abaissées de l'orthocentre h, rencontrent alors ab en des points a, e, b, f tels que e, f sont conjugués harmoniques par rapport à a, b. Par suite, le triangle cef est conjugué à 'ellipse et le cercle, qui lui est circonscrit, coupe orthogonalement le cercle orthoptique de l'ellipse; donc, etc.

Autrement. — Le cercle décrit sur ch comme diamètre coupe à angle droit le cercle dont ab est un diamètre; on a alors, en appelant m le milieu de ab : $\overline{ma}^2 = mp \times mc$. Par suite le cercle, qui contient a, p, c, est tangent en a à ab; il est alors circonscrit au triangle aplati suivant ca. Ce triangle est conjugué à l'ellipse; donc, etc.

Question 1769 (1).

(1897, p. 291. 1899, p. 384.)

Par le foyer d'une conique donnée on mène des cordes; les circonférences de cercles, qui ont ces cordes pour diamètres, sont tangentes à deux cercles. (MANNHEIM.)

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE,

PAR M. MANNHEIM.

Appelons f le foyer de la conique par lequel passe l'une des cordes mn. Par rapport à un cercle de centre f, la polaire réciproque de la conique est un cercle de centre o et de rayon R. Les polaires de m, n sont des tangentes à ce cercle, elles sont parallèles, distantes de 2R et coupent mn aux points m', n'. Prenons f pour pôle d'inversion. Le cercle décrit sur mn comme diamètre a pour transformée par inversion le cercle C décrit sur $m'n'$ comme diamètre. Ce cercle, dont le

(1) Au sujet de cette question MM. Mannheim et Barisien nous font remarquer avec raison que la solution de M. Audibert est incomplète. M. Audibert démontre en effet que le lieu des centres des cercles en question est une conique et se borne ensuite à faire observer que le lieu des centres des cercles tangents à deux cercles fixes est une conique. Or de ce que le centre d'un cercle décrit une conique, on ne peut évidemment pas conclure que ce cercle enveloppe deux autres cercles, puisqu'il faut une autre condition pour définir le déplacement du cercle mobile. X. A.

diamètre est égal à $2R$, a son centre au pied de la perpendiculaire abaissée de o sur mn, c'est-à-dire en un point du cercle décrit sur of comme diamètre.

Lorsque mn tourne autour de f, le cercle C de grandeur constante, se déplace de façon que son centre reste sur un cercle; son enveloppe se compose alors de deux cercles concentriques; donc, etc.

Question 1773.

(1897, p. 340)

Étant donnés une cycloïde de base AB *et un cercle ayant son centre au milieu* C *de* AB, *on prend la podaire de la cycloïde par rapport à un point quelconque* M *du cercle. Prouver que l'aire comprise entre la podaire, la droite* AB *et les deux tangentes* A *et* B *à la cycloïde est constante.* (E.-N. Barisien.)

NOTE.

Par un abonné.

Je crois que la proposition énoncée n'est pas exacte. En effet, si l'on prend pour axe polaire la droite parallèle à AB menée par le pôle M, et que l'on désigne par ω l'angle polaire, par a le rayon du cercle générateur de la cycloïde, par α et β les coordonnées de M relatives à deux axes dont l'un est AB et l'autre une perpendiculaire à cette droite menée par C milieu de AB, l'équation de la podaire sera

$$\rho = (2a - \beta)\sin\omega + (a\pi + \alpha - 2a\omega)\cos\omega.$$

L'aire S de la podaire comprise entre l'axe polaire et la courbe est déterminée par l'intégrale

$$\begin{aligned}
2S &= \int_0^\pi \rho^2\,d\omega \\
&= \int_0^\pi \big[\cos^2\omega(a\pi + \alpha)^2 + (2a - \beta)^2\sin^2\omega \\
&\qquad + (2a - \beta)(a\pi + \alpha)\sin 2\omega - 4a^2\omega^2\cos^2\omega \\
&\qquad - 4a(a\pi + \alpha)\omega\cos^2\omega + 2a(2a - \beta)\omega\sin 2\omega\big]\,d\omega \\
&= \frac{a^2\pi^3}{6} + 5a^2\pi + \frac{\pi}{2}(\alpha^2 + \beta^2) - 3a\pi\beta.
\end{aligned}$$

Si le point M est sur un cercle ayant son centre en C, le terme $\frac{\pi}{2}(\alpha^2+\beta^2)$ est constant, mais en ajoutant à $2S$ le double de l'aire du rectangle dont les côtés sont AB et β, on a

$$2S+2AB\beta = \frac{a^2\pi^3}{6}+5a^2\pi+\frac{\pi}{2}(a^2+\beta^2)+a\pi\beta,$$

expression qui varie avec β.

Question 1774.

(1897, p 340.)

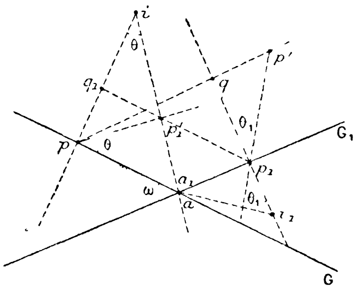
Le produit des paramètres de distribution des plans tangents à un paraboloïde hyperbolique, pour deux génératrices du même système et rectangulaires, est égal au carré de la plus courte distance de ces droites.

(MANNHEIM.)

GÉNÉRALISATION

Par M. D'OCAGNE.

Soient G et G_1 deux génératrices *quelconques* de même système projetées sur le plan directeur de ce système pris pour plan horizontal. Leur plus courte distance (aa_1) se projette suivant un point. Soient, en outre, p et p_1 les points centraux correspondants. Les plans centraux sont respectivement les



plans verticaux passant par G et G_1. Le plan tangent en a est défini par les génératrices G et ap_1, en a_1 par les génératrices G_1 et a_1p,

Faisons une projection sur le plan vertical perpendiculaire en p à ap. Le point p_1 se projette sur la perpendiculaire $p_1 q_1$ à la trace pq_1 de ce plan vertical, au point p'_1 tel que $q_1 p'_1 = \delta$, δ étant la plus courte distance de G et G_1.

Dès lors, l'angle θ que le plan tangent en a fait avec le plan central en p est projeté en vraie grandeur en app'_1. Abaissons du point a la perpendiculaire ai sur pp'_1. Elle coupe pq_1 au point i, et ce point est le point représentatif de la distribution des plans tangents pour la génératrice G. En effet, d'une part, pi est la perpendiculaire élevée à G par le point central p, de l'autre, l'angle pia sous lequel on voit du point i le segment pa est égal à l'angle θ que le plan tangent en a fait avec le plan central.

Par suite, le paramètre de distribution k de la génératrice G est égal à pi.

On obtient de même le paramètre de distribution $p_1 i_1 = k_1$ de G_1.

Si maintenant nous appelons l et l_1 les segments ap et $a_1 p_1$, ω l'angle des génératrices G et G_1, la similitude des triangles api et $pq_1 p'_1$, qui ont leurs côtés respectivement perpendiculaires, nous donne

$$\frac{pi}{pa} = \frac{q_1 p'_1}{q_1 p}$$

ou

$$\frac{k}{l} = \frac{\delta}{l_1 \sin \omega},$$

d'où

$$k = \frac{\delta l}{l_1 \sin \omega}.$$

De même,

$$k_1 = \frac{\delta l_1}{l \sin \omega}.$$

Faisant le produit, on a

$$kk_1 = \frac{\delta^2}{\sin^2 \omega}.$$

C'est-à-dire que *le produit des paramètres de distribution de deux génératrices* QUELCONQUES *de même système du paraboloïde, est égal au carré du quotient de leur plus courte distance par le sinus de leur angle.*

Dans le cas où l'on suppose $\omega = \frac{\pi}{2}$, on retrouve le théorème de l'énoncé.

Question 1778.

(1897, p. 388.)

Une conique rencontre les côtés BC, CA, AB *d'un triangle en* D, D′, E, E′, F, F′. *Les tangentes en* D, D′ *rencontrent* AB, AC *en* K, K′. L *est le conjugué harmonique de* B *par rapport aux points* F, F′, M *celui de* C *par rapport à* E, E′.

Démontrer que D′L, DM, KK′ *concourent en un même point.* (W. J. Greenstreet.)

SOLUTIONS

Par M. G. Leinekugel.

Solution géométrique. — On sait que l'enveloppe des droites rencontrant deux coniques (S), (Σ) en quatre points formant une division harmonique, est une conique tangente aux huit droites menées aux quatre points communs à (S), (Σ) et tangentes à ces coniques.

Considérons la conique (S) donnée et la conique (Σ) formée des droites (BC.LM), nous en déduisons, dans ce cas particulier, qu'il existe une conique tangente à DK, D′K′, BC et LM qui font partie des tangentes aux points communs aux coniques (S), (BC, LM); et de plus aux droites CA, BA, puisque

$$(\mathrm{CMEE'}) = -1, \qquad (\mathrm{BLFF'}) = -1.$$

L'hexagone IMKDD′K′ étant circonscrit à une conique, les trois diagonales concourent en un même point.

Solution analytique. — Prenons comme (*fig.* 1) triangle de référence DD′D″ et pour équations de (S), AB, AC,

$$(\mathrm{S}) \qquad \beta\gamma - \mu^2\alpha^2 = 0 \qquad (1)$$

$$\mathrm{AB} \qquad l\alpha + m\beta + n\gamma = 0, \qquad (2)$$

$$\mathrm{AC} \qquad l'\alpha + m'\beta + n'\gamma = 0 \qquad (3)$$

l'ensemble des droites D′F′, D′F obtenues par l'élimination de β entre (1) et (2), est

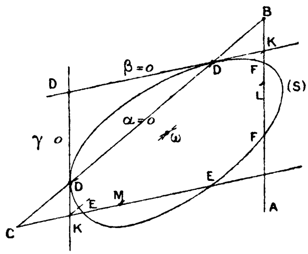
$$\mu^2 m\alpha^2 + l\alpha\gamma + n\gamma^2 = 0;$$

la conjuguée harmonique D′L de $\alpha = 0$, par rapport à ces droites, a pour equation

$$(D\,L) \qquad \alpha + \frac{2n}{l}\gamma = 0 \qquad (4)$$

de même, on a

$$(DM) \qquad \alpha + \frac{2m'}{l}\beta = 0 \qquad (5)$$



Quant a l'equation de KK, elle est

$$(KK) \qquad \alpha + \frac{n}{l}\gamma + \frac{m'}{l}\beta = 0 \qquad (6)$$

puisqu'elle doit passer par les deux points

$$K\begin{cases} \beta = 0, \\ \alpha + \dfrac{n}{l}\gamma = 0, \end{cases} \qquad K'\begin{cases} \gamma = 0, \\ \alpha + \dfrac{m}{l'}\beta = 0 \end{cases}$$

Ces trois droites D'L, DM, KK' passent par un meme point ω, puisqu'en ajoutant (4) et (5), on tombe sur l equation (6)

Autres solutions de MM. W GREENSTREET et J RICHARD

Question 1786

(1898 p 99)

A, B, C, D *etant quatre quantites imaginaires donnees et* X *une quantite imaginaire variable, on forme le determinant*

$$\begin{vmatrix} A+X & B+X \\ C+X & D+X \end{vmatrix} = \Delta$$

Démontrer :

1° *Que si le module de* Δ *reste constant, le point* X, *affixe de* X, *parcourt une circonférence;*

2° *Que si l'argument de* Δ *reste constant, le point* X *parcourt une droite.*

Trouver le centre de cette circonférence et la direction de cette droite lorsque l'argument de Δ *est nul.*

(C.-A. LAISANT.)

SOLUTION

Par M. DULIMBERT.

Je pose

$$A = a + a'i,\quad B = b + b'i,\quad C = c + c'i,\quad D = d + d'i,$$
$$X = x + yi,\quad \Delta = \xi + \eta i = \rho(\cos\omega + i\sin\omega).$$

Le développement du déterminant donne immédiatement

$$\begin{aligned}
\xi &= (a + d - b - c)x + (b' + c' - a' - d')y \\
&\quad + ad - a'd' - (bc - b'c'), \\
\eta &= (a' + d' - b' - c')x + (a + d - b - c)y \\
&\quad + ad' + a'd - (bc' + b'c).
\end{aligned}$$

Les équations $\xi = 0$, $\eta = 0$ représentent deux droites rectangulaires dont les directions sont faciles à déterminer. En effet, la quantité

$$\frac{a' + d' - (b' + c')}{a + d - (b + c)}$$

est le coefficieut angulaire de la droite qui joint le milieu de AD au milieu de BC. La droite $\eta = 0$ est symétrique de cette droite par rapport aux axes coordonnés et la droite $\xi = 0$ perpendiculaire à $\eta = 0$.

Si ρ est constant, on a

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2,$$

équation d'un cercle qui a pour centre le point d'intersection des droites $\xi = 0$, $\eta = 0$.

Si ω est constant, on a

$$\tang\omega = \frac{\eta}{\xi}$$

ou

$$\eta - \xi \tang\omega = 0,$$

équation d'une droite qui passe par le point d'intersection des deux mêmes droites.

Enfin, si ω est nul, le point X décrit la droite $\eta = 0$, dont la direction a été déterminée précédemment ([1]).

Autre solution de M. E.-N. Barisien.

Question 1787.

(1898, p. 148.)

On considère les points de contact des coniques inscrites à un quadrilatère avec un des côtés du quadrilatère et l'on demande :

1° *Le lieu des centres de courbure de ces coniques correspondant aux points de contact;*

2° *L'enveloppe des cercles osculateurs qui correspondent aux centres de courbure précédents.* (G. Tzitzéica.)

SOLUTION

Par M. Audibert.

1° Prenons pour axes des coordonnées deux côtés quelconques du quadrilatère se coupant à l'origine et faisant entre eux un augle α; soient

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0, \qquad \frac{x}{c}+\frac{y}{d}-1=0$$

les équations des deux autres côtés, celle d'une conique inscrite sera

$$\frac{\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)x+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{d}\right)y\right]^2}{\lambda} + \frac{\left(\frac{y}{b}+\frac{x}{c}-1\right)^2}{1-\lambda} - \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{d}-1\right)^2 = 0.$$

([1]) *Note de la Rédaction.* — Δ se mettant sous la forme immédiate $P+QX$, il est évident que si le module de X est constant l'extrémité de Δ décrit une circonférence dont le centre est l'extrémité de P; et que si l'argument de Δ est constant, on a une droite passant par l'extrémité de P. (C.-A. L.)

Cette courbe touche l'axe des X au point

$$y = 0, \qquad x = \frac{ac\lambda}{a - c(1-\lambda)} = m.$$

Transportons l'origine à ce point, en conservant l'axe des X et prenant pour ligne des ordonnées la normale à la courbe. Les formules de transformation sont

$$x = m + x_1 - y_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad y = \frac{y_1}{\sin\alpha},$$

et le rayon de courbure à l'origine, ρ, sera égal au coefficient de y, divisé par le coefficient de x_1^2, dans l'équation transformée.

On trouve, d'après ces données,

$$\rho = \frac{\left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{d}\right)\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{bc(1-\lambda)} - \frac{1}{ad}\right] m - \frac{d - b(1-\lambda)}{db(1-\lambda)}}{\frac{[a - c(1-\lambda)]^2}{a^2c^2\lambda(1-\lambda)}\sin\alpha}.$$

Reportons le système rectangulaire d'axes parallèlement à lui-même à l'origine primitive ; nous aurons, x et y étant les coordonnées du lieu cherché,

$$y = \rho, \qquad x = m, \qquad \lambda = \frac{x(a-c)}{c(a-x)},$$

$$1 - \lambda = \frac{a(c-x)}{c(a-x)}, \qquad \frac{[a - c(1-\lambda)]^2}{a^2c^2\lambda(1-\lambda)} = \frac{a-c}{a(c-x)}.$$

Il en résulte l'équation

$$(1) \qquad y\frac{bd(a-c)}{2(b-d)}\sin\alpha = x(x-a)(x-c).$$

2° L'équation de l'enveloppe des cercles osculateurs tangents à l'axe des X, s'obtiendra en substituant dans (1) $\frac{y}{2}$ à y.