NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

AUDIBERT

Certificats d'études supérieures (session de juillet 1898)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 461-465

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__461_1>

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES (SESSION DE JUILLET 1898);

SOLUTIONS PAR M. AUDIBERT.

Paris.

I. *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$(1)\qquad \frac{dx}{dt} + x - y = e^t,$$

$$(2)\qquad \frac{dy}{dt} + x - z = \cos t,$$

$$(3)\qquad \frac{dz}{dt} + x \qquad = 0;$$

on mettra l'intégrale sous forme réelle.

Retranchons (2) de la somme (1) + (3); on a

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} + x - y + z = e^t - \cos t,$$

dont l'intégrale est

$$(\alpha)\qquad x - y + z = \frac{e^t}{2} - \frac{\cos t + \sin t}{2} + 2Ce^{-t}.$$

L'élimination de $x - y$ entre (1) et (α) donne

$$\frac{dx}{dt} - z = \frac{e^t}{2} + \frac{\cos t + \sin t}{2} - 2Ce^{-t}.$$

En différentiant (3) on a

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 0,$$

et de la différence de ces deux dernières relations résulte

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + z = -\frac{e^t}{2} - \frac{\cos t + \sin t}{2} + 2Ce^{-t},$$

dont l'intégrale générale est

$$z = A \sin t + B \cos t + \frac{t}{4}(\cos t + \sin t) + Ce^{-t} - \frac{e^t}{4}.$$

On en déduit

$$x = -\frac{dz}{dt} = -A \cos t + B \sin t - \frac{\cos t + \sin t}{4} + \frac{t}{4}(\cos t + \sin t) + Ce^{-t} + \frac{e^t}{4},$$

$$y = x + \frac{dx}{dt} - e^t = (A + B) \sin t - (A - B) \cos t + \frac{\cos t + 3 \sin t}{4} + \frac{t}{2} \cos t - \frac{e^t}{2}.$$

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale*

$$\iint x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} (1 - x - y)^{\frac{2}{3}} \, dx \, dy$$

étendue à l'aire du triangle formé par les droites

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad x + y - 1 = 0.$$

Précisant les limites, l'intégrale peut s'écrire

$$I = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} \, dx \int_0^{1-x} y^{\frac{1}{3}} (1 - x - y)^{\frac{2}{3}} \, dy.$$

La valeur de I exprimée à l'aide des fonctions Γ est égale à

$$\frac{\Gamma(\frac{3}{2}).\Gamma(\frac{4}{3}).\Gamma(\frac{5}{3})}{\Gamma(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{3})} = \frac{2^4.\Gamma(\frac{1}{3}).\Gamma(\frac{2}{3})}{3.5.7.9};$$

mais

$$\Gamma(\tfrac{1}{3}).\Gamma(\tfrac{2}{3}) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}},$$

en vertu de la formule connue

$$\Gamma(n).\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}.$$

Il en résulte

$$I = \frac{2^5.\pi}{3.5.7.9.\sqrt{3}}.$$

Cette intégrale peut être calculée par la méthode élémentaire en posant $y = (1-x)\frac{z^3}{1+z^3}$; on a alors

$$I = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^2\,dx.3\int_0^\infty\left[\frac{dz}{(1+z^3)^2} - \frac{dz}{(1+z^3)^3}\right]$$

$$= \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^2\,dx.$$

Faisant ensuite $x = u^2$,

$$I = \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}\int_0^1 (1-u^2)^2 u^2\,du = \frac{2^5.\pi}{3.5.7.9.\sqrt{3}}.$$

Montpellier.

Calcul différentiel et intégral.

I. *Déterminer l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$(x+\alpha)(x^2-\alpha^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x(x+\alpha)\frac{dy}{dx} + 6\alpha y = 2(x-\alpha)^3,$$

sachant qu'elle peut être vérifiée par des polynomes en x.

L'équation sera vérifiée par $y = ax^2 + bx + c$, si l'on fait $a = 1$, $b = -\alpha$, $c = \frac{2\alpha^2}{3}$.

L'intégrale générale sera donc

$$u + x^2 - \alpha x + \frac{2\alpha^2}{3},$$

u étant l'intégrale générale de l'équation privée de second membre

$$(1)\quad (x+\alpha)(x^2-\alpha^2)\frac{d^2u}{dx^2}-2x(x+\alpha)\frac{du}{dx}+6\alpha u=0.$$

Différentiant trois fois de suite, on a

$$(x+\alpha)\frac{d^5u}{dx^5}+5\frac{d^4u}{dx^4}=0.$$

Cette dernière équation intégrée donne

$$M=A(x+\alpha)^{-1}+Bx^3+Cx^2+Dx+E.$$

Introduisant cette valeur de u dans (1) et disposant de trois des constantes arbitraires pour qu'elle devienne une identité, on a

$$u=A(x+\alpha)^{-1}+B(x+\alpha)^3-\frac{2A}{3\alpha}.$$

L'intégrale générale cherchée sera donc

$$y=A(x+\alpha)^{-1}+B(x+\alpha)^3+x^2-\alpha x+\frac{2(\alpha^3-A)}{3\alpha}.$$

II. *Calculer la valeur de l'intégrale triple*

$$\iiint\left[(x+y+z)^2-\frac{9a^2}{5}\right]dx\,dy\,dz$$

lorsque x, y, z *prennent toutes les valeurs vérifiant les deux inégalités*

$$x^2+y^2-2az<0,$$
$$x^2+y^2+z^2-3a^2<0.$$

Cet énoncé revient à dire que l'intégrale est prise à l'intérieur du solide formé par le paraboloïde de révolution $x^2+y^2=2az$, limité par la calotte sphérique que ce paraboloïde découpe sur la sphère

$$x^2+y^2+z^2=3a^2$$

En donnant d'abord à z une valeur constante, on aura à intégrer la fonction à l'intérieur d'un cercle de rayon $(2az)^{\frac{1}{2}}$, z étant compris entre o et a. Ce rayon prend la valeur $(3a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}$ pour $a < z < a\sqrt{3}$.

L'intégrale

$$\int\int(xy + xz + yz)\,dx\,dy$$

prise à l'intérieur d'un cercle $x^2 + y^2 = f(z)$, est nulle quelle que soit la valeur attribuée à z. La fonction peut donc être simplifiée et réduite à l'expression

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{9a^2}{5} = \rho^2 + z^2 - \frac{9a^2}{5} = \varphi(\rho, z),$$

en faisant $x = \rho \cos t$, $y = \rho \sin\theta$.

On a alors à calculer l'intégrale

$$2\pi\left[\int_0^a dz \int_0^{(2az)^{\frac{1}{2}}} \varphi(\rho, z)\rho\,d\rho \right.$$
$$\left. + \int_0^{a\sqrt{3}} dz \int_a^{(3a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \varphi(\rho, z)\rho\,d\rho\right] = -\frac{7}{30}\pi a^5.$$