Nouvelles annales de mathématiques

G. Fontené

Sur le hessien d'une forme cubique binaire

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 459-461

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__459_1>

[B7a]

SUR LE HESSIEN D'UNE FORME CUBIQUE BINAIRE;

PAR M. G. FONTENÉ.

1. En appliquant aux formes cubiques binaires la remarque qui conduit à l'identité de la hessienne et de la steinerienne pour les courbes et les surfaces du troisième ordre, on obtient un résultat intéressant, et de plus le hessien de la forme cubique se présente *de lui-même* sous la forme qu'on lui donne habituellement sans en rendre compte.

Considérons le polynome du troisième degré

$$u = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d:$$

(1) Cette propriété était déjà connue. *Voir* DARBOUX, *Leçons*, t. I, p. 318.

les indices 1 et 2 indiquant des dérivées par rapport à x et à la variable y d'homogénéité, le polynome du second degré

$$x' u_1 + u_2$$

aura une racine double x'' si l'on a simultanément

$$\begin{cases} x' u''_{11} + u''_{21} = 0, \\ x' u''_{12} + u''_{22} = 0, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x' u''_{11} + u''_{12} = 0, \\ x' u''_{21} + u''_{22} = 0, \end{cases}$$

u'' indiquant que l'on remplace x par x''; ces relations étant symétriques en x' et x'', puisqu'elles expriment que les points-racines A' et A'' sont conjugués par rapport aux points-racines de chacune des deux équations du *second degré* $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, on voit que x' et x'' peuvent être échangés. On a ainsi, en désignant par x une inconnue dont les deux valeurs sont x' et x'',

$$\begin{cases} x'x'' - x(x' + x'') + x^2 = 0, \\ ax'x'' + b(x' + x'') + c = 0, \\ bx'x'' + c(x' + x'') + d = 0, \end{cases}$$

d'où ce résultat : *En désignant par x' et x'' les deux racines de l'équation*

$$(1) \qquad \mathrm{H} = \begin{vmatrix} 1 & -x & x^2 \\ a & b & c \\ b & c & d \end{vmatrix} = 0,$$

on a

$$(2) \qquad \begin{cases} x' u_1 + u_2 = \mathrm{A}(x - x'')^2, \\ x'' u_1 + u_2 = \mathrm{B}(x - x')^2. \end{cases}$$

2. La raison donnée ici pour établir la symétrie qui a lieu entre x' et x'' s'applique au cas des formes cubiques à un nombre quelconque de variables : elle est plus directe que celle qui se déduit de considérations générales relatives à une forme u d'un degré quelconque (Cf. SALMON, *Courbes planes,* n° 175).