NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

R. BRICARD

Sur les systèmes de trois relations doublement quadratiques entre trois variables

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 437-454

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__437_1>

[F8fβ]

SUR LES SYSTÈMES DE TROIS RELATIONS DOUBLEMENT QUADRATIQUES ENTRE TROIS VARIABLES;

PAR M. G. FONTENÉ ET R. BRICARD.

On connaît les polygones de Poncelet et les recherches de MM. Hart, Kempe et Darboux sur les systèmes de quadrilatères articulés. Des recherches analogues entreprises séparément par chacun de nous (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1897 : *Extension des polygones de Poncelet; Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1897 : *Théorie de l'octaèdre articulé; Bulletin de la Société mathématique de France*, 1897 : *Sur les fonctions elliptiques du second ordre*) ont abouti à un échange de vues d'où est résulté le Mémoire que nous publions aujourd'hui.

L'objet de ce Mémoire est :

1° *La recherche des conditions dans lesquelles trois relations doublement quadratiques entre trois va-*

riables

$$F_1(y, z) = 0, \qquad F_2(z, x) = 0, \qquad F_3(x, y) = 0$$

admettent une infinité de solutions, sans que la dernière soit le résultat complet de l'élimination de z entre les deux premières, F_3 devant être seulement l'un des deux facteurs du résultant, et deux cas sont à distinguer selon que les relations sont de genre *un* ou de genre *zéro;*

2° La démonstration *formelle* du fait suivant : Écrivons

$$(1) \qquad F_1(y, z) = 0, \qquad F_2(z, x) = 0, \qquad F_3(x, y) = 0,$$

$$(2) \qquad x = f_1(u), \qquad y = f_2(u), \qquad z = f_3(u),$$

$$(2') \qquad x = \frac{P_1(u)}{Q_1(u)}, \qquad y = \frac{P_2(u)}{Q_2(u)}, \qquad z = \frac{P_3(u)}{Q_3(u)},$$

$$(3) \qquad \begin{cases} A\,xyz + B_1\,yz + \ldots + C_1\,x + \ldots + D = 0, \\ A'xyz + B'_1\,yz + \ldots + C'_1\,x + \ldots + D' = 0: \end{cases}$$

les relations (1), de genre un ou de genre zéro, sont supposées compatibles de la manière indiquée; les f sont des fonctions elliptiques du second ordre aux mêmes périodes, à sommes de pôles distinctes; les P et les Q sont des polynomes du second degré; les relations (3) sont linéaires par rapport à chacune des variables; *nous établirons, pour le cas où le genre est un, l'équivalence des relations* (1) *supposées compatibles de la manière indiquée et des formules* (2), *l'équivalence des relations* (3) *et des relations* (1) *ou des formules* (2); *et, pour le cas où le genre est zéro, l'équivalence des relations* (1) *et des formules* (2'), *en observant qu'on a alors une seule relation de la forme* (3).

Le premier paragraphe est consacré au premier problème. Les deux paragraphes suivants se rapportent à la dernière question; en indiquant par le signe $1 \rightarrow 2$ le passage de (1) à (2), nous établirons les passages suivants :

$$\begin{tikzcd} & 3 \arrow[dl] & \\ 1 \arrow[rr, shift left] & & 2 \arrow[ul] \arrow[ll, shift left] \end{tikzcd}$$

ce qui suffit; le second paragraphe est relatif à l'équivalence de (1) et (2), et le passage de la relation $F_1 = 0$ aux formules $y = f_2(u)$, $z = f_3(u)$ est établi par une méthode différente de celle que l'on trouve dans l'Ouvrage d'Halphen; dans le troisième paragraphe on établit le passage de (2) à (3), et le passage de (3) à (1) est immédiat; on pourrait, au lieu d'établir le passage de (2) à (3), établir directement l'équivalence de (1) et (3), comme dans l'article déjà cité du *Bulletin;* le passage direct de (3) à (2) par le calcul semble devoir être artificiel.

Si l'on regarde x, y, z comme des coordonnées cartésiennes, les relations (1), ou les formules (2) ou (2'), ou les relations (3) quand elles ont lieu, représentent une sextique gauche à trois points doubles, de genre un ou de genre zéro, ces deux sextiques étant d'ailleurs bien différentes : nous considérerons ces sextiques. Elles forment un schéma commode pour les problèmes du genre de ceux dont il a été parlé, et l'on verra que l'on peut réduire ces schémas à ceux d'une cubique plane de genre un ou d'une cubique gauche; M. Darboux a déjà employé la cubique plane : en posant, pour un quadrilatère plan articulé ABCD,

$$x = \cos(\omega, AB) + i \sin(\omega, AB), \qquad \dots$$

où ω est un axe, on a les deux relations

$$ax + by + cz + dt = 0, \qquad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} + \frac{d}{t} = 0,$$

qui sont de la forme (3) quand on regarde t comme une constante.

I.

1. Considérons trois relations doublement quadratiques indécomposables,

$$(1)\qquad F_1(y, z) = 0, \qquad F_2(z, x) = 0, \qquad F_3(x, y) = 0;$$

la première, par exemple, peut être ordonnée par rapport à z ou par rapport à y, et l'on a

$$\begin{cases} Y'_1 z^2 + 2Y''_1 z + Y'''_1 = 0, \\ Z'_1 y^2 + 2Z''_1 y + Z'''_1 = 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} Z'_2 x^2 + 2Z''_2 x + Z'''_2 = 0, \\ X'_2 z^2 + 2X''_2 z + X'''_2 = 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} X'_3 y^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ Y'_3 x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \end{cases}$$

Y'_1, Y''_1, Y'''_1, par exemple, étant trois polynomes du second degré en y. Cherchons à quelles conditions ces relations admettent une infinité de solutions.

2. Il peut arriver d'abord que les trois relations se réduisent d'elles-mêmes à deux : y et z vérifiant $F_1 = 0$, les deux équations en x auront leurs deux racines communes, de sorte que $F_1 = 0$ doit être identique à

$$\frac{Y'_3}{Z'_2} = \frac{Y''_3}{Z''_2} = \frac{Y'''_3}{Z'''_2}.$$

Ce cas se produit lorsque $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$ sont des relations homographiques entre $\frac{Y}{Y'}$ et $\frac{Z}{Z'}$, d'une part, $\frac{Z}{Z'}$ et $\frac{X}{X'}$, d'autre part, X et X′, par exemple, étant des polynomes du second degré en x, auquel cas l'élimination de $\frac{Z}{Z'}$ donne une relation de même forme entre

$\frac{X}{X'}$ et $\frac{Y}{Y'}$; on peut ramener les relations à la forme simple

$$\frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'} = \frac{Z}{Z'},$$

dont les 14 paramètres apparents se réduisent facilement à 12 paramètres effectifs; une transformation homographique permet même de réduire ces relations à des relations homographiques entre x^2, y^2, z^2. Nous écarterons ce cas.

3. Une relation doublement quadratique $F_1(y, z) = 0$, non décomposable, peut s'écrire

$$(Z'_1 y + Z''_1)^2 - \mathfrak{Z}_1 = 0, \qquad y = \frac{-Z''_1 \pm \sqrt{\mathfrak{Z}_1}}{Z'_1},$$

$\mathfrak{Z}_1$ étant un polynome du quatrième degré en z, non carré parfait, et pouvant se réduire accidentellement à un degré moindre. Nous appellerons *valeurs critiques* de z les valeurs finies de cette variable qui donnent pour y deux valeurs égales : ce sont les quatre racines de l'équation $\mathfrak{Z}_1 = 0$;

1° Si elles sont au nombre de quatre ou de trois, et si elles sont distinctes, *la relation est de genre un,* d'après $\sqrt{\mathfrak{Z}_1}$;

2° Si l'on a $\mathfrak{Z}_1 = (C_1 z + C'_1)^2 \times Z_1$, Z_1 étant un polynome du second degré en z, *la relation est de genre zéro;* on peut suivre ces faits sur la courbe $F_1(y, z) = 0$, quartique binodale, ou cubique anodale dans le premier cas, quartique trinodale, ou cubique nodale, ou conique dans le second cas.

Les quatre valeurs critiques de y sont données par une équation $\mathfrak{Y}_1 = 0$ analogue à l'équation $\mathfrak{Z}_1 = 0$. Le rapport anharmonique des y critiques pris dans un certain ordre est égal à celui des z critiques pris dans un ordre convenable; si un z critique est double, un y critique est double. Pour établir ce fait, on peut observer qu'une substitution homographique (trois paramètres) effectuée sur l'une des variables permet de transformer la relation donnée en une relation symétrique (trois conditions), comme on le voit d'ailleurs dans le *Traité des fonctions elliptiques* d'Halphen, t. II, Chap. IX; on peut encore remarquer que des substitutions homographiques effectuées sur les deux variables permettent de faire que zéro et l'infini soient critiques pour y, critiques pour z, ce qui réduit la vérification à un calcul très simple, la relation prenant la forme

$$(Ayz + By - Cz + D)^2 - 4yz = 0:$$

un calcul moins simple se trouve dans le *Traité des courbes planes* de Salmon, à propos des quartiques binodales : on fait disparaître les termes du troisième degré.

Théorème. — *Étant données deux relations doublement quadratiques* $F_1(y, z) = 0$, $F_2(z, x) = 0$, *indécomposables, les conditions pour que la relation entre x et y qui en résulte se décompose en deux relations* $F_3(x, y) = 0$, $\Phi_3(x, y) = 0$, *qui seront doublement quadratiques, sont les suivantes :*

1° *Si l'une des relations est de genre un, l'autre doit être aussi de genre un, et les quatre valeurs critiques de la variable commune z doivent être les mêmes dans les deux relations;*

2° *Si l'une des relations est de genre zéro, l'autre doit être aussi de genre zéro, et, après qu'on a écarté la valeur critique double de z qui existe dans chacune des deux relations, et qui n'est pas astreinte à être la même de part et d'autre, les deux valeurs critiques* *restantes de cette variable z doivent être les mêmes dans les deux relations; la valeur critique double peut d'ailleurs manquer dans l'une des relations, ou dans les deux.*

La décomposition demandée étant supposée avoir lieu, si l'on considère des valeurs de y et de z vérifiant $F_1 = 0$, on a pour x deux valeurs algébriquement séparables (dont l'une, par exemple, est la racine commune aux deux équations $F_2 = 0$, $F_3 = 0$); chacune de ces deux valeurs de x est donc fonction rationnelle de y et z, en tant que y est lié à z par la relation $F_1 = 0$; les deux relations primitives étant

$$Z'_1 y^2 + 2Z''_1 y + Z'''_1 = 0,$$
$$Z'_2 x^2 + 2Z''_2 x + Z'''_2 = 0,$$

l'expression de x en z fournie par la seconde doit être une fonction rationnelle de z et de l'expression de y en z fournie par la première; comme on a

$$y = \frac{-Z''_1 \pm \sqrt{\mathfrak{Z}_1}}{Z'_1}, \qquad x = \frac{-Z'_2 \pm \sqrt{\mathfrak{Z}_2}}{Z'_2},$$

on doit avoir identiquement, pour une association convenable des signes,

$$\frac{-Z'_2 \pm \sqrt{\mathfrak{Z}_2}}{Z'_2} = \mathrm{R}\left(z, \frac{-Z''_1 \pm \sqrt{\mathfrak{Z}_1}}{Z'_1}\right),$$

$\mathrm{R}(z, y)$ étant une fonction rationnelle; le produit $\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_2$ doit donc être un carré parfait, d'où il suit que les conditions du théorème sont nécessaires.

Montrons qu'elles sont suffisantes :

1° Si $\mathfrak{Z}_1$ est un polynome du quatrième ou du troisième degré sans facteur carré, on peut supposer $\mathfrak{Z}_2$ identique à $\mathfrak{Z}_1$, et écrire, en supprimant l'indice de $\mathfrak{Z}$,

$$(Z'_1 y + Z''_1)^2 - \mathfrak{Z} = 0, \qquad (Z'_2 x + Z''_2)^2 - \mathfrak{Z} = 0,$$

d'où l'on déduit, pour une même valeur de z,

$$Z'_1 y + Z''_1 \pm (Z'_2 x + Z''_2) = 0;$$

cela entraîne la décomposition indiquée, une valeur de y donnant deux valeurs de x, et inversement, lorsqu'on a choisi l'un des deux signes.

2° Si $\mathfrak{Z}_1$ est de la forme $(C_1 z + C'_1)^2 \times Z$, $\mathfrak{Z}_2$ est par hypothèse de la forme $(C_2 z + C'_2)^2 \times Z$, et l'on obtient

$$\frac{Z'_1 y + Z''_1}{C_1 z + C'_1} \pm \frac{Z'_2 x + Z''_2}{C_2 z + C'_2} = 0,$$

ce qui entraîne encore la décomposition cherchée.

On doit observer que, dans un cas comme dans l'autre, le système des deux relations $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ doit satisfaire à quatre conditions, de sorte qu'il reste 12 paramètres; mais *les deux cas sont très différents l'un de l'autre,* les polynomes $\mathfrak{Z}_1$ et $\mathfrak{Z}_2$ étant identiques dans le premier cas, et ne l'étant généralement pas dans le second puisque la valeur critique double de z n'est pas la même pour les deux relations : le second cas ne se rattache au premier que si cette valeur critique double devient la même dans les deux relations, ce qui supprime un paramètre.

4. Quand la décomposition précédente a lieu, si l'on désigne par $F_3(x, y) = 0$ l'une des deux relations fournies par l'élimination de z, on a un système (1) satisfaisant aux conditions requises. En cherchant à définir simplement la relation $F_3 = 0$, on peut dire :

Corollaire I. — *Étant données trois relations doublement quadratiques* (1), *dont l'une est de genre* un, *les conditions pour qu'elles admettent une infinité de solutions, avec un x unique pour y et z vérifiant* $F_1 = 0$, ..., *sont les suivantes : les trois relations* *doivent être de genre un, les quatre valeurs de chaque variable qui sont critiques pour l'une des deux autres variables doivent être critiques pour la troisième, ce qui fait onze conditions et non douze (à cause de l'égalité de rapports anharmoniques dont on a parlé), et il faut encore une condition. Il reste* 12 *paramètres. La recherche de la dernière condition paraît difficile; un cas particulier est donné dans l'article cité des* Nouvelles Annales.

Corollaire II. — *Si l'une des relations* (1) *est de genre zéro, les trois relations doivent être de genre zéro (trois conditions), les deux valeurs de chaque variable qui sont critiques pour l'une des deux autres variables doivent être critiques pour la troisième, ce qui fait six conditions, et il faut encore trois conditions. Il reste* 12 *paramètres.*

5. Avec des coordonnées cartésiennes, les équations $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ représentent en général une courbe gauche du douzième ordre, plus la droite à l'infini du plan des xy prise quatre fois; il peut arriver (n° 2) que la projection de cette courbe sur le plan des xy ait une équation de la forme $F_3 = 0$. Dans les conditions indiquées au n° 3, cette courbe se décompose en deux sextiques gauches, dont l'une est représentée par les trois équations (1) : *cette sextique gauche a pour points doubles les points à l'infini* A, B, C, *sur les axes, et elle dépend de* 12 *paramètres, les points doubles étant donnés; elle peut être de genre un ou de genre zéro, ce qui forme deux cas très distincts;* la sextique de genre zéro ne devient un cas particulier de la sextique de genre un que si la valeur critique double de z est la même dans F_1 et F_2; elle a alors un point double, géné-

ralement nodal, et qui peut être cuspidal. Réciproquement, toute sextique gauche à trois points doubles A, B, C, ces points doubles étant à l'infini sur les axes, est représentée par trois équations telles que (1) : le cylindre projetant pour la direction OA, par exemple, est, en effet, d'ordre $6 - 2$, puisque A est un point double de la courbe, etc.

II.

6. Considérons les formules

$$(2) \qquad x = f_1(u), \qquad y = f_2(u), \qquad z = f_3(u),$$

$$(2') \qquad x = \frac{P_1(u)}{Q_1(u)}, \qquad y = \frac{P_2(u)}{Q_2(u)}, \qquad z = \frac{P_3(u)}{Q_3(u)};$$

les f sont des fonctions elliptiques du second ordre aux mêmes périodes, à sommes de pôles distinctes, et les 14 paramètres apparents des formules (2) se réduisent à 12 paramètres effectifs par la substitution de $mu + n$ à u; les P et les Q sont des polynomes du second degré, et les 15 paramètres apparents des formules (2′) se réduisent à 12 par une substitution homographique. Les formules (2) ou (2′) considérées en elles-mêmes représentent la sextique à trois points doubles A, B, C, de genre un ou de genre zéro; une sextique à trois points doubles est d'ailleurs de genre un ou de genre zéro, comme il résulte de ce qu'on a dit à la fin du n° 5 : comme la sextique générale de genre un ou zéro dépend de 24 paramètres, ainsi qu'on le voit par la représentation paramétrique, une sextique à trois points doubles dépend de 21 paramètres, et il en reste 12 si l'on donne les points doubles.

7. Pour montrer l'équivalence de (1) et (2), nous rappellerons d'abord des faits connus, que nous établi-

rons en généralisant l'emploi de la méthode donnée dans l'Ouvrage d'Halphen pour le cas où la relation $F_1 = 0$ est symétrique. Deux fonctions elliptiques du second ordre d'un même argument, $f_2(u)$ et $f_3(u)$, aux mêmes périodes, les sommes de pôles étant distinctes, sont liées par une relation doublement quadratique de genre *un*, qui reste inaltérée quand on change u en $mu + n$; les nombres de paramètres font prévoir la réciproque. L'équation différentielle relative à $F_1(y, z)$, soit

$$(Z'_1 y + Z''_1)dy + (Y'_1 z + Y''_1)dz = 0,$$

devient, avec des signes convenables des radicaux,

$$\frac{dy}{\sqrt{\mathfrak{Y}_1}} = \frac{dz}{\sqrt{\mathfrak{Z}_1}};$$

on peut donc écrire

$$\frac{dy}{\sqrt{\mathfrak{Y}_1}} = h\,du, \qquad \frac{dz}{\sqrt{\mathfrak{Z}_1}} = k\,du,$$

et l'on a $y = f_2(u)$, $z = f_3(u)$, f_2 et f_3 étant des fonctions elliptiques du second ordre; comme, d'ailleurs, les racines des deux polynomes $\mathfrak{Y}_1$ et $\mathfrak{Z}_1$ sont équianharmoniques, de sorte que ces polynomes ont même invariant absolu, le rapport des périodes est le même pour les deux fonctions, et, en disposant de $\frac{k}{h}$, on peut faire que ces deux fonctions aient les mêmes périodes. Il reste un facteur arbitraire h, et deux constantes d'intégration dont l'une dépend de l'autre par la condition que $y = f_2(u)$ et $z = f_3(u)$ satisfassent à la relation $F_1 = 0$ non différentiée; cela revient à dire que l'on peut remplacer u par $mu + n$ comme on l'a déjà dit. Un z critique est un z qui donne pour u deux valeurs égales aux périodes près. (La relation entre l'invariant absolu de l'équation différentielle et le rapport des périodes est bien connue pour la fonction pu, ce qui suffit à l'établir d'une manière générale : pour pu, on la trouve, par exemple, dans l'*Abrégé de la théorie des fonctions elliptiques,* de M. Ch. Henry; la méthode d'Halphen, pour l'équation dissymétrique $F_1 = 0$, est indépendante de cette relation, et en fournit par suite une démonstration indirecte : on se donne $\mathfrak{Y}_1$ et $\mathfrak{Z}_1$ ayant même invariant absolu, on considère la relation correspondante $F_1(y, z) = 0$, etc.).

Cela posé, le passage de (2) à (1) est immédiat. Le passage inverse, quand les relations (1) sont de genre un, se fait en écrivant

$$\frac{dx}{\sqrt{\mathfrak{X}}} = \frac{dy}{\sqrt{\mathfrak{Y}}} = \frac{dz}{\sqrt{\mathfrak{Z}}}.$$

8. En partant d'une relation $F_1 = 0$ de genre zéro, la marche précédente donne pour y et z des formules *réductibles* à la forme suivante :

$$y = \beta \frac{\sin\left(\frac{u}{2} - b\right)\sin\left(\frac{u}{2} - b'\right)}{\sin\left(\frac{u}{2} - b''\right)\sin\left(\frac{u}{2} - b'''\right)} \qquad b'' + b''' = b + b',$$

avec 8 paramètres que la substitution de $u +$ const. à u réduit à 7; cette forme de la réponse est un cas singulier de celle relative au cas où la relation $F_1 = 0$ est de genre un. Mais le cas où les trois relations (1), supposées de genre zéro, admettent une infinité de solutions, ne rentre pas dans le cas des relations de genre un, et la réponse aux relations (1) n'est pas fournie par trois formules analogues à la précédente. En posant $\operatorname{tang}\frac{u}{2} = U$, on arrive aux formules (2′), lesquelles, *a priori,* conviennent à ce cas.

Dans le cas singulier où la sextique de genre zéro, ayant un point double, rentre dans la sextique de genre un, on a

$$\frac{dx}{A(x-\alpha)\sqrt{X}} = \frac{dy}{B(y-\beta)\sqrt{Y}} = \frac{dz}{C(z-\gamma)\sqrt{Z}},$$

et l'on a alors trois formules telles que la formule ci-dessus, avec 11 paramètres; le point double est le point (α, β, γ). Si le point double est cuspidal, on a les mêmes formules avec $\frac{u}{2} - b$ au lieu de $\sin\left(\frac{u}{2} - b\right)$, .. c'est-à-dire que, dans les formules (2'), la somme des racines de Q_i est alors égale à la somme des racines de P_i.

III.

9. Arrivons aux relations

$$(3)\ \begin{cases} A\,xyz + B_1\,yz + \ldots + C_1\,x + \ldots + D = 0, & \text{ou} \quad S = 0, \\ A'xyz + B'_1\,yz + \ldots + C'_1\,x + \ldots + D' = 0, & \text{ou} \quad S' = 0, \end{cases}$$

dont les 14 paramètres apparents se réduisent à 12 parce que l'on peut prendre $S + \lambda S' = 0$, $S + \mu S' = 0$, ce qui permet de supprimer le terme en xyz dans l'une des relations et le terme indépendant dans l'autre : nous établirons le passage de (2) à (3); pour le cas où les relations (1) sont de genre zéro, ce qui donne les formules (2'), on aura encore *une* relation (3). Nous considérerons d'abord les relations (3) en elles-mêmes.

Une surface du troisième ordre S, ayant pour points doubles les points à l'infini A, B, C, contenant par suite les droites BC, CA, AB, est représentée par une équation (3). Deux surfaces de cette nature ont pour intersection incomplète une sextique gauche par laquelle passent toutes les surfaces du faisceau $S + \lambda S' = 0$; cette sextique est en particulier sur une quadrique, dont les génératrices sont les droites qui rencontrent la sextique en trois points; elle a pour points doubles les points A, B, C.

Le théorème de Lamé sur l'existence d'un huitième point commun aux quadriques qui passent par 7 points tient à ceci : une quadrique dépend de 9 paramètres, et trois quadriques ont 9 — 1 ou 8 points communs; on prend alors 9 — 2 ou 7 points. On a ici des surfaces S qui dépendent de 7 paramètres, et trois de ces surfaces ont 7 — 1 ou 6 points communs (en négligeant les droites à l'infini), puisque deux d'entre elles ont pour intersection une sextique ayant les points A, B, C pour points doubles, de sorte que la troisième donne 18 points d'intersection dont 4 sont confondus en A, 4 en B, 4 en C, ce qui laisse 6 points d'intersection à distance finie. Dès lors, *si l'on assujettit la surface à passer par 5 points donnés,* comme elle dépend encore de 2 paramètres, son équation sera de la forme

$$S + \lambda S' + \mu S'' = 0,$$

et elle passera par le sixième point commun aux trois surfaces S, S′, S″. Il serait intéressant de construire ce sixième point, connaissant d'ailleurs les directions qui fixent les trois points doubles A, B, C.

Si l'on considère la sextique qui est la courbe commune aux surfaces du faisceau $S + \lambda S' = 0$, *cinq points de cette courbe en déterminent un sixième,* qui est le dernier point commun aux surfaces du troisième ordre, à trois points doubles A, B, C, passant par ces cinq points. Les surfaces du troisième ordre, à trois points doubles A, B, C, qui passent par six points de la sextique ne formant pas un système, contiennent la sextique, et forment le faisceau $S + \lambda S' = 0$.

10. Montrons maintenant que la sextique (2), c'est-à-dire la sextique à trois points doubles de genre un, est identique à celle considérée ici, ce qui établira le passage de (2) à (3). Cette sextique (2) admettant les points A, B, C comme points doubles, une surface du troisième ordre, à trois points doubles A, B, C, la rencontre en six points distincts des points A, B, C; les arguments de ces six points sont donnés par l'équation

$$A f_1 f_2 f_3 + B f_2 f_3 + \ldots + E f_1 + \ldots + H = 0,$$

dont le premier membre est une fonction elliptique du sixième ordre; ces arguments ont une somme constante, quelle que soit la surface du troisième ordre considérée, de sorte que 5 des 6 points déterminent le sixième. Dès lors si l'on assujettit la surface, qui dépend de 7 paramètres, à passer par 6 points de la sextique ne formant pas un système, elle aura avec elle plus de 6 points communs distincts de A, B, C et la contiendra; elle dépendra d'ailleurs d'un paramètre, et l'on aura le faisceau $S + \lambda S' = 0$. Si les deux surfaces S et S' sont tangentes, on a la sextique nodale (ou même cuspidale) de genre zéro dont on a parlé.

11. La sextique générale à trois points doubles, de genre zéro, est sur *une* surface du troisième ordre S ayant pour points doubles les points doubles de la sextique. D'ailleurs, toute sextique est sur une surface du troisième ordre; pour une sextique à trois points doubles A, B, C, on a des surfaces du troisième ordre dépendant de 3 paramètres, ce qui explique le résultat précédent.

IV.

12. Les deux sextiques gauches à trois points doubles A, B, C, de genre un et de genre zéro, *comprennent*

comme cas particuliers les deux quartiques gauches, biquadratique gauche et quartique gauche de seconde espèce, passant en A, B, C. (On sait que la quartique gauche de seconde espèce est l'intersection d'une quadrique et d'une surface du troisième ordre contenant deux génératrices d'un même système de la quadrique; le cône qui a pour sommet un point de la courbe, et pour directrice la courbe, est un cône du troisième ordre ayant pour droite double une génératrice de la quadrique appartenant au système précédent.) Avec les relations (1), le terme en $y^2 z^2$ manque pour $F_1, \ldots$: les projections sont des cubiques anodales ou nodales, résultat conforme à ce qui précède. Avec les formules (2) et (2'), il suffit de supposer que les trois fonctions f ont un pôle commun, ou que les trois polynomes Q ont une racine commune. Avec les relations (3), il faut faire $A = 0$, $A' = 0$; pour la quartique de genre zéro, on obtient *une* quadrique passant par la courbe : les génératrices du système indiqué plus haut sont les droites qui rencontrent la courbe en trois points; cette quadrique est d'ailleurs l'enveloppe des plans qui coupent la courbe en quatre points équianharmoniques (LAGUERRE, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XI, p. 420); *a priori*, toute quartique gauche est sur une quadrique. La sextique nodale ou cuspidale donne la quartique nodale ou cuspidale.

Pour la cubique gauche dont les points à l'infini sont sur les axes, les projections (1) sont des coniques; les formules (2') se réduisent à $x = A\dfrac{u-a'}{u-a}, \ldots$; les surfaces (3) sont des quadriques en nombre doublement infini.

13. *Les deux sextiques considérées comprennent*

encore, comme cas particuliers remarquables, la cubique plane de genre un dont les points à l'infini sont dans les plans de coordonnées, et la cubique gauche dans les mêmes conditions. Avec les formules (2) ou (2'), il suffit de supposer que les trois fonctions f ont deux à deux un pôle commun, ou que les trois polynomes Q ont deux à deux une racine commune; dans le premier cas on a les formules

$$x = \mathrm{A}\frac{\sigma(u-a')\sigma(u-a'')}{\sigma(u-b)\sigma(u-c)}, \quad y = \mathrm{B}\frac{\sigma(u-b')\sigma(u-b'')}{\sigma(u-c)\sigma(u-a)}, \ldots,$$

et l'on vérifie aisément que les points à l'infini sont en ligne droite, ce qui vérifie le fait que la courbe est plane, en s'assurant que les trois relations par lesquelles on exprime qu'un plan contient ces trois points se réduisent à deux : on se sert des relations $a' + a'' = b + c, \ldots$, d'où l'on déduit $(b - a') + (c - a'') = 0, \ldots$. L'une des surfaces (3) est un plan.

14. La transformation

$$(4) \qquad xX = yY = zZ = 1,$$

qui change généralement la sextique en une courbe de même nature, la change en une quartique gauche, biquadratique gauche ou quartique de seconde espèce, quand l'origine des coordonnées est prise sur la courbe; on peut le voir sur (1), (2) ou (3).

Par un choix convenable de l'origine, la transformation (4) *change la sextique de genre un en une cubique plane, la sextique de genre zéro en une cubique gauche.* La courbe doit rencontrer $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$: l'origine doit être sur la seconde courbe commune aux deux cylindres $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, et sur le cylindre $F_3 = 0$. Pour une sextique de genre un, si l'on désigne par w_i

la somme des pôles de f_i, on détermine trois arguments a, b, c par les relations

$$b + c = w_1 + 2\Omega, \qquad c + a = w_2 + 2\Omega, \qquad a + b = w_3 + 2\Omega,$$

ce qui donne quatre solutions, et l'on prend comme origine O′ un point dont les coordonnées sont

$$x_0 = f_1(b) = f_1(c), \qquad y_0 = f_2(c) = f_2(a), \qquad z_0 = \ldots.$$

On peut dire encore que les quatre origines O′ sont les points doubles à distance finie des surfaces du faisceau $S + \lambda S' = 0$ qui ont un quatrième point double, et qui sont des surfaces corrélatives de surfaces de Steiner : on a alors, dans l'une des relations (3), $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$, $D = 0$, et la transformation (4) donne un plan; pour une biquadratique gauche, les quatre origines O′ sont les sommets des quatre cônes du second degré qui contiennent la courbe. Si la sextique est de genre zéro, on trouve qu'il existe deux origines O′, c'est-à-dire deux points tels que les trois cordes de la courbe qui passent en ce point aboutissent aux points à l'infini A, B, C.