NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Note du rédacteur

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 419-420

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__419_1>

NOTE DU RÉDACTEUR.

Le théorème par lequel M. Fontené, dans l'article qui précède, a étendu à l'espace le théorème de Bellavitis sur le quadrangle plan, est susceptible d'une démonstration vectorielle. Il s'agit du théorème I. La démonstration suivante n'est pas celle à laquelle l'Auteur fait allusion à la fin du n° 7; il m'a paru plus facile d'établir les formules (4) du n° 1.

Soient A, B, C, A′, B′, C′ les vecteurs BC, CA, AB, DA, DB, DC dans le tétraèdre ABCD; a, b, c, ... seront les longueurs de ces vecteurs.

Le triangle LMN de l'énoncé a pour côtés aa', bb', cc'; les cosinus de ses angles seront donc

$$\frac{b^2b'^2 + c^2c'^2 - a^2a'^2}{2bcb'c'} \quad \ldots;$$

d'autre part, l'angle résultant défini par l'énoncé est celui du rapport géométrique $\frac{B}{C}\cdot\frac{B'}{C'}$, comme on le voit aisément, ou $\frac{1}{c^2c'^2}\cdot C.B.C'.B'$; tout se réduit donc à étudier l'angle de $C.B.C'.B'$, donnée par

$$\frac{\mathfrak{S}C.B.C'.B'}{cbc'b'} = \cos\alpha.$$

Or on a

$$\begin{aligned} C.B.C'.B' &= C.B(A'+B)(A'+C)\\ &= C.B.A'^2 + C.B.A'.C + C.B^2.A' + C.B^2.C, \end{aligned}$$

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{S}(C.B.C'.B') = &- a'^2\mathfrak{S}(C.B) - c^2\mathfrak{S}(B.A')\\ &- b^2\mathfrak{S}(C.A') + b^2c^2, \end{aligned}\right.$$

à cause de la formule connue

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(P.Q.R.T) = \mathfrak{S}(P.Q)\mathfrak{S}(R.T) &- \mathfrak{S}(P.R)\mathfrak{S}(Q.T)\\ &+ \mathfrak{S}(P.T)\mathfrak{S}(Q.R), \end{aligned}$$

qui réduit $\mathfrak{S}(C.B.A'.C)$ à $C^2\mathfrak{S}(B.A')$ ou $-c^2\mathfrak{S}(B.A')$.

Mais l'inspection de la figure donne

$$\mathfrak{S}(C.B) = -\frac{b^2+c^2-a^2}{2}, \qquad \mathfrak{S}(B.A') = \frac{b^2+a'^2-c'^2}{2},$$

$$\mathfrak{S}(C.A') = \frac{c^2+a'^2-b'^2}{2}.$$

On a donc

$$\mathfrak{S}(C.B.C'.B') = \frac{b^2b'^2 + c^2c'^2 - a^2a'^2}{2},$$

ce qui démontre la proposition.

On en déduit les théorèmes sphériques II, III, IV, les théorèmes plans analogues, et les conséquences de ces théorèmes plans données dans la seconde Partie. C.-A. LAISANT.