Ch. Zahradnik

Contribution à la théorie des cubiques cuspidales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 389-407

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__389_0>

[M¹5c]

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DES CUBIQUES CUSPIDALES;

PAR M. CH. ZAHRADNIK,
Professeur de Mathématiques à l'Université de Zagreb.

1. Prenant le point de rebroussement pour origine des coordonnées, la tangente en ce point pour axe des **X**, et la droite qui joint ce point au point d'inflexion pour axe des Y, on aura comme équation de la courbe C_3^3

$$ax^3 + bxy^2 + cy^3 = dy^2.$$

Cette courbe est unicursale; les coordonnées de ses points sont fonctions rationnelles du paramètre

$$u = \frac{x}{y} = \frac{\sin(yu)}{\sin(ux)}.$$

On a, comme on sait,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{du}{au^3 + bu + c},\\ y &= \frac{d}{au^3 + bu + c}.\end{aligned}\right.$$

Par la substitution de ces valeurs dans l'équation d'une droite, on trouve

$$(2)\qquad u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

comme condition pour que trois points de la courbe C_3^3 soient en ligne droite. Si deux de ces points coïncident, on a $u_2 = u_3 = u$ et la droite en question devient la tangente à la courbe C_3^3 au point u.

La relation (2) se réduit à

$$(3)\qquad 2u + u_1 = 0.$$

Le point u est le point de contact de la tangente; cette tangente rencontre la courbe C_3^3 en u_1. Le point u_1 s'appelle le *tangentiel* du point u ([1]).

DROITES SATELLITES.

2. Soient

$$\xi x + \eta y + 1 = 0$$

l'équation d'une droite P et u_1, u_2, u_3 les points d'intersection de cette droite avec la courbe C_3^3. Traçons les tangentes à la courbe en ces points. Ces tangentes rencontrent respectivement la courbe C_3^3 en trois points u'_1, u'_2, u'_3, qui seront situés sur une même droite. D'après (3), on aura

$$2u_1 + u'_1 = 0, \qquad 2u_2 + u'_2 = 0, \qquad 2u_3 + u'_3 = 0.$$

En additionnant ces trois relations, on obtient

$$2(u_1 + u_2 + u_3) + u'_1 + u'_2 + u'_3 = 0,$$

et eu égard à (2), on trouve enfin $u'_1 + u'_2 + u'_3 = 0$, qui est la condition nécessaire et suffisante pour que les points u'_1, u'_2, u'_3, tangentiels des points u_1, u_2, u_3, soient sur la ligne droite. La droite sur laquelle se trouvent les tangentiels u'_h des trois points u_h porte le nom de *droite satellite* de la droite P. Désignons-la par R_1. De la même manière, l'on peut trouver R_2, c'est-à-dire la droite satellite de la droite R_1 ou la seconde satellite de la droite P. Les intersections u''_h de la droite R_2 avec la courbe C_3^3 satisfont à la condition

$$2u'_h + u''_h = 0. \qquad h = 1, 2, 3.$$

On aura donc

$$u''_h = -2u'_h = 2^2 u_h.$$

([1]) SALMON-CHEMIN, *Courbes planes*, p. 188.

On obtiendrait de même les droites satellites consécutives de la droite P jusqu'à la satellite $n^{\text{ième}}$ R_n. Entre les paramètres $u_h^{(n)}$ de ses intersections avec la courbe C_3^3 et des intersections $u_h^{(n-1)}$ de la droite R_{n-1} existe la relation

$$2u_h^{(n-1)} + u_h^{(n)} = 0, \qquad h = 1, 2, 3,$$

d'où

$$u_h^{(n)} = -2u_h^{(n-1)}.$$

Substituant à n les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$, on trouve enfin

$$u_h^{(n)} = (-2)^n u_h, \qquad h = 1, 2, 3$$

comme relation entre les paramètres des intersections de la droite P avec C_3^3 et les paramètres correspondants de sa $n^{\text{ième}}$ satellite R_n.

La courbe C_3^3 étant construite et la position de la droite P étant fixée, on peut facilement construire la satellite R_n. La construction s'appuie sur la signification géométrique du paramètre u. Pour $\lim n = \infty$, on a

$$\lim u_h^{(n)} = \pm\infty, \qquad h = 1, 2, 3.$$

Le résultat obtenu nous enseigne que la satellite R_n de plus en plus s'approche de la tangente au point de rebroussement de la courbe C_3^3; ils coïncident pour $n = \infty$.

Cherchons maintenant à déterminer la droite S_1 dont la satellite est la droite P. Soit v_h le point de contact de la tangente menée du point u_h à la courbe C_3^3, on aura

$$u_h + 2v'_h = 0, \qquad h = 1, 2, 3,$$

et, en vertu de la relation (2),

$$\sum_{h=1}^{3} v'_h = 0.$$

Cela veut dire que les points de contact des tangentes.

menées des points d'intersection de la droite P avec la courbe C_3^3 sur la même courbe, sont sur une ligne droite S_1. La droite S_1 peut s'appeler *satellite négative* de la droite P. La satellite négative de la droite S_1 est S_2, et pour elle on trouve tout de suite

$$v''_h + 2v'_h = 0,$$

d'où

$$v''_h = -\frac{1}{2}v'_h = \frac{1}{2^2}v_h, \qquad h = 1, 2, 3.$$

En procédant de la même manière, nous parviendrons jusqu'à la $n^{\text{ième}}$ satellite négative S_n et aux relations

$$v_h^{(n-1)} + 2v_h^{(n)} = 0,$$

$$v_h^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n v_h, \qquad h = 1, 2, 3.$$

Pour $\lim n = \infty$, on a $\lim v_h^n = 0$; la droite S_n s'approche de la tangente stationnaire. Ils coïncident pour $\lim n = \infty$; nous allons le démontrer.

3. En vertu de (2), l'équation de la droite passant par deux points u_1 et u_2 peut être écrite

$$(c + a u_1 u_2 u_3)y + [b + a(u_3^2 - u_1 u_2)]x - d = 0.$$

Comme on a $\overline{u_1 u_2} \equiv \overline{u_2 u_3} \equiv \overline{u_3 u_1} \equiv \text{P}$, on aura, après les permutations cycliques des indices et après avoir additionné les équations résultantes et supprimé le facteur 3,

$$(6) \qquad \text{P} \equiv [b - a(u)_2]x + [c + a(u)_3]y - d = 0.$$

$(u)_k$ signifie la somme des combinaisons k à k des paramètres u_1, u_2, u_3.

Pour la droite S_n, nous aurons

$$(v^{(n)})_3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{3n}(u)_3,$$

$$(v^{(n)})_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}(u)_2,$$

par conséquent

$$S_n \equiv \left[b - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} a(u)_2\right] x + \left[c + \left(-\frac{1}{2}\right)^{3n} a(u)_3\right] y - d = 0.$$

Au cas de $\lim n = \infty$, cette expression devient

$$\lim_{n=\infty} S_n \equiv bx + cy - d = 0 \tag{7}$$

C'est précisément l'équation de la tangente stationnaire de la courbe C_3^3.

Posons $P \equiv R_0$, $S_n \equiv R_{-n}$, on aura le théorème suivant :

Dans la suite illimitée des droites R_h, *h partant de* $-\infty$ *jusqu'à* $+\infty$, *chaque droite est la satellite de la droite qui la succède.*

CORRESPONDANCE HOMOGRAPHIQUE ENTRE P ET R_1 PAR RAPPORT A C_3^3.

4. Dans ce qui précède, nous avons reconnu la correspondance univoque et réciproque des droites P et R_1. A chaque droite P correspond une droite R_1 et réciproquement à chaque droite R_1 correspond une droite P, passant par les points de contact des tangentes menées des points d'intersection de la droite P avec la courbe C_3^3 à cette même courbe.

Soient ξ, η les coordonnées de la droite P, ξ_1, η_1 les coordonnées de R_1, on trouve au moyen de l'équation (6) pour la droite P

$$a(u)_2 = b + d\xi,$$
$$a(u)_3 = -c - d\eta.$$

et par analogie pour la droite R_1

$$a(u')_2 = b + d\xi_1.$$
$$a(u')_3 = -c - d\eta_1.$$

Tenant compte de la relation (3), on peut écrire

$$(u')_2 = 4(u)_2,$$
$$(u')_3 = -8(u)_3;$$

alors

$$(8)\qquad \begin{cases} \xi_1 = 4\xi + \dfrac{3b}{d}, \\[2ex] \eta_1 = -8\eta - \dfrac{9c}{d}. \end{cases}$$

Les équations (8) déterminent la correspondance homographique entre les systèmes des droites P et R_1 dans le plan de la courbe C_3^3.

5. Les droites doubles de la transformation homographique, c'est-à-dire les droites coïncidant avec leurs satellites, satisfont aux conditions

$$\xi = \xi_1, \qquad \eta = \eta_1.$$

Des équations (8), on tire immédiatement

$$\xi = -\frac{b}{d}, \qquad \eta = -\frac{c}{d},$$

c'est-à-dire que la tangente stationnaire de la courbe C_3^3 est la droite double de cette transformation homographique.

Si l'on emploie les coordonnées homogènes de Hesse, on peut écrire les équations (8) sous la forme

$$(8\ bis)\qquad \begin{cases} \rho\xi_1 = 4d\xi + 3b\xi, \\ \rho\eta_1 = -8d\eta - 9c\xi, \\ \rho\xi_1 = d\xi. \end{cases}$$

Au cas de $P = R_1$, on a

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} 4d-\rho & 0 & 3b \\ 0 & -8d-\rho & -9c \\ 0 & 0 & d-\rho \end{vmatrix} = 0.$$

Les racines de ces équations sont

$$\rho_1 = d, \qquad \rho_2 = 4d, \qquad \rho_3 = -8d.$$

Dans le cas $\rho_1 = d$, on obtient le résultat connu que la droite double de cette homographie est la tangente au point d'inflexion de la courbe C_3^3. A la racine $\rho_2 = 4d$ correspond l'axe des Y comme seconde droite double, et pour $\rho_3 = -8d$, on obtient l'axe des X, c'est-à-dire la tangente au point de rebroussement de la courbe C_3^3 comme troisième droite double de la correspondance homographique. Le triangle des droites doubles est donc constitué de la tangente au point de rebroussement, de la tangente au point d'inflexion et de la droite passant par les points de rebroussement et par le point d'inflexion de la courbe C_3^3.

6. A l'aide de l'équation (8) on obtient directement l'équation de la droite R_1^* qui correspond à la droite à l'infini dans le système ΣP. Les coordonnées tangentielles de la droite R_1^* sont $\frac{3b}{d}$, $-\frac{9c}{d}$; son équation est par conséquent

$$(9) \qquad R_1^* \equiv 3bx - 9cy + d = 0.$$

A la droite à l'infini du système ΣR_1 correspond la droite P^*, dont les coordonnées tangentielles sont $-\frac{3b}{4d}$, $-\frac{9c}{8d}$, et l'on a comme auparavant

$$(10) \qquad P^* \equiv 6bx + 9cy - 8d = 0.$$

7. Si la droite $P(\xi, \eta)$ passe par le point $p(x, y)$, la droite $R_1(\xi_1, \eta_1)$ passera par le point $r_1(\xi_1, \eta_1)$.

Substituons dans l'équation

$$x\xi + y\eta + 1 = 0$$

à ξ et η les valeurs tirées des équations (8), nous aurons

$$-\frac{2dx}{6bx+9cy-8d}\xi_1+\frac{dy}{6bx+9cy-8d}\eta_1+1=0.$$

Cela veut dire que la droite $R_1(\xi_1, \eta_1)$ passe par le point r_1 dont les coordonnées sont

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1&=\frac{-2dx}{6bx+9cy-8d},\\ y_1&=\frac{dy}{6bx+9cy-8d}.\end{aligned}\right.$$

Au point p de la droite P correspond un seul point r_1 situé sur la droite R_1. Nous en concluons que si la droite P tourne autour de son point p, la droite conjuguée R_1 tournera autour de son point r_1. Les points p et r_1 sont conjugués. Si le point p décrit la droite P, le point conjugué r_1 décrira la droite conjuguée R_1.

Cela nous conduit à la correspondance homographique des points p et des points conjugués r, dans le plan de la courbe C_3^3. Cette correspondance est déterminée par les équations

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \mu x &= 4dx_1,\\ \mu y &= -8dy_1,\\ \mu z &= 3bx_1-9cy_1+dz_1,\end{aligned}\right.$$

qui dérivent des relations (8 *bis*) par la substitution transposée des équations (11), écrites dans les coordonnées homogènes et résolues par rapport à x, y, z. Les points doubles de cette transformation sont les intersections des droites doubles de la transformation homographique (8). Pour les points doubles ou unis, on a $x_1=x$, $y_1=y$; à l'aide de (11), on obtient pour les coordonnées des points doubles $(0, 0)$, $\left(0, \frac{d}{c}\right)$, $\left(\frac{d}{b}, 0\right)$.

On aurait pu aussi partir de l'équation (12) et, pour $p = r_1$, on trouverait

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} 4d-\mu & 0 & 0 \\ 0 & -8d-\mu & 0 \\ 3b & -9c & d-\mu \end{vmatrix} = 0.$$

8. Dans la transformation établie pour (12), au faisceau (p) des rayons P correspond le faisceau homographique (r_1) des rayons R_1. Ces deux faisceaux déterminent la conique, passant par les sommets p et r_1 et par les points doubles de cette transformation. Pour les coordonnées de l'intersection des rayons conjugués $P(\xi, \eta)$ et $R_1(\xi_1, \eta_1)$ on trouve, à l'aide de (8),

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} x &= -\frac{3(d\eta+c)}{4d\xi\eta+3c\xi+b\eta}, \\ y &= -\frac{d\xi-b}{4d\xi\eta+3c\xi-b\eta}. \end{aligned} \right.$$

La droite (ξ, η) appartient au faisceau (p); en vertu de cela, elle passe par le point $p(\alpha, \beta)$, et l'on a par conséquent

$$\alpha\xi + \beta\eta + 1 = 0.$$

Il est évident que l'on peut, dans l'équation (13), exprimer ξ par η ou réciproquement. De cette manière, on obtient les coordonnées des points de la conique en question comme des fonctions rationnelles du paramètre ξ ou η. Pour $\eta = -\frac{c}{d}$, on a $\xi = \frac{\beta c - d}{\alpha d}$, et la conique passe par le point double $\left(0, \frac{d}{c}\right)$; pour $\xi = \frac{b}{d}$, $\eta = \frac{\alpha b - d}{\beta d}$, elle passe par le point double $\left(\frac{d}{b}, 0\right)$, et enfin, pour $\xi = \infty$ et $\eta = \infty$, elle passe par le point double $(0, 0)$.

De cette manière, au point p l'on pourrait faire correspondre la conique $C(p)$. A l'aide du paramètre ξ on a, pour les coordonnées des points de cette conique

$$(13\ bis)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{3[(\beta c - d) - a\,d\xi]}{(4d\xi + b)(\alpha\xi + 1) - 3\beta c\xi}, \\[2ex] y = \dfrac{\beta(\alpha\xi + b)}{(4d\xi + b)(\alpha\xi + 1) - 3\beta c\xi}. \end{cases}$$

Pour les points p qui sont en dehors de la parabole

$$\Pi \equiv (bx - 3cy + 4d)^2 - 16b\,dx = 0,$$

la conique correspondante $C(p)$ est une hyperbole; aux points situés sur cette parabole ou dans son intérieur correspond une parabole ou ellipse respectivement. L'on peut donc, au point p, faire correspondre le point r_1 ou la conique passant par les points p et r et par les points doubles du système.

9. Nous savons déjà qu'à chaque point p de la droite P correspond un, et un seul, point r_1 sur la droite R_1. Si le point p se meut de manière qu'il reste toujours sur la droite P, le point conjugué r_1 décrira la droite R_1. Les points conjugués des droites P et R_1 forment deux systèmes homographiques des points; la droite mobile, qui joint deux points homologues quelconques de ces deux systèmes, décrit une courbe de la deuxième classe, tangente aux deux droites fixes P et R_1 et aux droites doubles du système.

Les coordonnées ξ, η de la droite T qui joint les points correspondants p et r_1 sont

$$(14)\qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{2bx - 3cy - 3d}{dx}, \\[2ex] \eta = -\dfrac{2bx + 3cy - 2d}{dy}. \end{cases}$$

Le point p étant sur la droite fixe $P(m, n)$, on a

$$mx + ny + 1 = 0.$$

En vertu de cette relation l'on peut, dans le système (14), exprimer x par y ou réciproquement. Cela nous fournit la représentation paramétrique de cette conique. On s'assure directement, à l'aide des équations (14), que ladite conique touche les droites doubles du système. Si le point p est sur la tangente d'inflexion (7), on a $\xi = -\frac{b}{a}$, $\eta = -\frac{c}{d}$; la tangente stationnaire de la courbe C_3^3 est une tangente de la conique, etc.

On pourrait encore énoncer le théorème suivant :

A la droite P *correspond la conique* T(P), *enveloppe de la droite mobile qui joint les points homologues sur les droites* P *et* R_1.

DROITES SATELLITES NORMALES.

10. La condition pour que les droites P et R_1 soient perpendiculaires est $\xi\xi_1 + \eta\eta_1 = 0$, et l'on a en vertu de (8)

$$\Pi = 4d\xi^2 - 8d\eta^2 + 3b\xi - 9c\eta = 0.$$

Les droites P et R_1 seront perpendiculaires si la droite P touche la parabole Π. A la parabole Π, enveloppe des droites P, correspond la parabole

$$\Pi' = d(\xi_1^2 - \eta_1^2) - 3b\xi_1 - 9c\eta_1 = 0.$$

Le lieu des sommets de l'angle droit dont un côté glisse sur la parabole Π et l'autre sur la parabole Π', est une courbe rationnelle du quatrième degré; ses points doubles coïncident avec les points doubles du système.

A l'aide de $\xi = \lambda\eta$, l'on peut exprimer ξ et η, et, par conséquent, x et y dans l'équation (13), comme les fonctions rationnelles du paramètre λ.

L'AFFINITÉ QUADRATIQUE RÉCIPROQUE.

11 Les coordonnées du point t, intersection des droites P et R_1 sont

$$(13)\quad \begin{cases} x = -\dfrac{3(d\eta + c)}{4d\xi\eta - 3c\xi + b\eta}, \\[2mm] y = -\dfrac{d\xi + b}{4d\xi\eta + 3c\xi + b\eta}, \end{cases}$$

Par la division de ces deux équations, on trouve

$$dx\xi - 3dy\eta + bx - 3cy = 0.$$

Le point $t(x, y)$ étant sur la droite $P(\xi, \eta)$, on aura

$$x\xi + y\eta + 1 = 0.$$

Les deux dernières équations donnent

$$(15)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{-bx + 3cy - 3d}{4dx}, \\[2mm] \eta = \dfrac{bx - 3cy - d}{4dy}. \end{cases}$$

Les équations (13) et (15) nous montrent qu'entre la droite P et le point conjugué $t \equiv R_1 P$ existe une affinité rationnelle, quadratique et réciproque.

12. Nous pouvons partir aussi du point $p(x, y)$ sur la droite P. A ce point correspond le point r_1 sur la droite R_1. Pour les coordonnées de la droite $T \equiv pr_1$, qui joint les points homologues p et r_1, nous avons trouvé

$$(14)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{2bx - 3cy - 3d}{dx}, \\[2mm] \eta = \dfrac{-2bx + 3cy + 2d}{dy}. \end{cases}$$

A chaque point p sur la droite P correspond une droite T, qui passe par ce point; réciproquement, à chaque droite T correspond un point p sur la droite P, intersection de ces deux droites T et P. Si l'on résout les équations (14) par rapport à x et y, on obtient

$$(16)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{3(d\eta + c)}{d\xi\eta + 3c\xi - 2b\eta}, \\ y = -\dfrac{2(d\xi + b)}{d\xi\eta + 3c\xi - 2b\eta}. \end{cases}$$

De cette manière, nous sommes conduits à deux affinités rationnelles, quadratiques et réciproques. Les coordonnées des éléments correspondants satisfont à l'équation $x\xi + y\eta + 1 = 0$. Les éléments principaux de cette affinité quadratique réciproque sont les éléments doubles de la transformation homographique précitée.

Si l'on écrit les équations de l'affinité (15) avec le même dénominateur $4dxy$, l'on aura

$$\begin{aligned} y[-(b + 4d\xi)x + 3cy - 3d] &= 0, \\ x[bx - (3c + 4\eta)y - d] &= 0. \end{aligned}$$

Les coordonnées des points d'intersection de ces deux coniques dégénérées $(0, 0)$, $\left(0, \dfrac{d}{c}\right)$, $\left(\dfrac{d}{b}, 0\right)$ ne dépendent pas de la droite (ξ, η); seulement, le quatrième point d'intersection, dont les coordonnées sont données par (13), en dépend.

A la ligne droite (ξ, η), lieu des points (x, y), correspond la courbe de la deuxième classe, touchant les droites principales; à un point (x, y), sommet du faisceau des rayons (ξ, η) correspond une courbe du deuxième degré, qui passe par les points principaux. A la courbe de la deuxième classe, qui ne touche aucune droite principale, correspond une courbe de la quatrième classe, dont les points doubles coïncident avec les points principaux de cette affinité, etc.

CORRESPONDANCES HOMOGRAPHIQUES SUCCESSIVES.

13. Le système des droites P et le système des droites R_1 sont en correspondance homographique, établie par les équations (8). Mais les droites P et leurs n^{iemes} droites satellites sont aussi en correspondance, qui est déterminée par les relations

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi_n &= 4^n\xi + (4^n - 1)\frac{b}{d},\\ \eta_n &= (-8)^n\eta + [(-8)^n - 1]\frac{c}{d}. \end{aligned}\right.$$

De ces équations, on reconnaît que les systèmes ΣR_m et ΣR_n sont aussi en correspondance homographique et que l'on a

$$\xi_n = 4^{n-m}\xi_m + (4^{n-m} - 1)\frac{b}{d},$$

$$\eta_n = (-8)^{n-m}\eta_m + [(-8)^{n-m} - 1]\frac{c}{d}.$$

Toutes ces correspondances ont les mêmes droites doubles : tangente au point de rebroussement, tangente stationnaire et la droite qui joint le point de rebroussement au point d'inflexion.

14. Maintenant nous démontrerons que les droites R_n, satellites de la droite P, touchent une courbe de la troisième classe.

Les équations

$$d\xi_n + b = 4^n(d\xi + b),$$
$$d\eta_n + c = (-8)^n(d\eta + c)$$

peuvent s'écrire

$$\frac{d\xi_n + b}{d\xi + b} = 4^n, \qquad \frac{d\eta_n + c}{d\eta + c} = (-8)^n,$$

d'où

$$\left(\frac{d\xi_n + b}{d\xi + b}\right)^3 = \left(\frac{d\eta_n + c}{d\eta + c}\right)^2,$$

et enfin

$$\frac{(d\xi_n + b)^3}{(d\eta_n + c)^2} = \frac{(d\xi + b)^3}{(d\eta + c)^2}.$$

On voit donc que le quotient $\frac{(d\xi + b)^3}{(d\eta + c)^2}$ a la même valeur k pour la droite P et pour toutes ses droites satellites R_n, n variant de $-\infty$ à $+\infty$. On a donc

$$(d\xi + b)^3 = k(d\eta + c)^2.$$

Les droites satellites touchent une certaine courbe de la troisième classe et, comme nous le verrons, du troisième degré.

En employant la substitution

$$d\eta + c = (d\xi + b)u,$$

on trouve

$$(19) \qquad \begin{cases} \eta = \dfrac{ku^3 - c}{d}, \\ \xi = \dfrac{ku^2 - b}{d}. \end{cases}$$

Les points d'intersection des deux tangentes infiniment voisines sont les points de la courbe en question. Leurs coordonnées sont données par les équations

$$(20) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{3ud}{ku^3 - (b + c)u + 3c}, \\ y = \dfrac{(u - 3)d}{ku^3 - (b + c)u + 3c}. \end{cases}$$

Toutes les satellites de la droite P touchent donc une courbe Γ_3^3.

La tangente au point de rebroussement et la tangente stationnaire de la courbe C_3^3 sont aussi les tangentes de la courbe Γ_3^3.

Cela résulte directement des nos 2 et 3 ou des équations (19).

Cherchons maintenant à déterminer le lieu des points t, qui sont conjugués aux droites satellites successives R_1, R_2, ... de la droite P, par rapport à C_3^3. A l'aide des équations (15), on trouvera

$$d\xi + b = \frac{3(bx + cy - d)}{4x},$$

$$d\eta + c = \frac{bx + cy - d}{4y}.$$

Les points t, conjugués aux droites satellites R_n, sont sur la cubique cuspidale

$$4kx^3 = 27(bx + cy - d)y^2.$$

Cette courbe et la courbe donnée C_3^3 coïncident pour

$$k = -\frac{27}{4}a.$$

RÉSULTATS OBTENUS A L'AIDE DES COORDONNÉES TRILINÉAIRES.

15. Le triangle constitué de la tangente stationnaire, de la tangente au point de rebroussement et de la droite qui joint le point de rebroussement au point d'inflexion, joue un rôle spécial dans la théorie des cubiques cuspidales.

Prenons ce triangle pour le triangle de référence.

L'équation de la courbe C_3^3 sera alors

$$x_1^2 x_3 - x_2^3 = 0, \tag{21}$$

$x_3 = 0$ est la tangente stationnaire et $x_1 = 0$ tangente au point d'inflexion. L'équation (21) peut être remplacée par le système des équations

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda x_1 - x_2 &= 0, \\ \lambda^2 x_2 - x_3 &= 0, \end{aligned} \right. \tag{22}$$

cela veut dire que la courbe C_3^3 peut être engendrée à l'aide des deux faisceaux des rayons, qui se correspondent un à deux (*einzweideutig*) (1). Les coordonnées du point qui correspond au paramètre λ sont $1, \lambda, \lambda^3$. L'équation de la droite $\overline{\lambda_1\lambda_2}$, qui joint les points λ_1 et λ_2, est

$$\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)x_1-(\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2)x_2+x_3=0.$$

Trois points λ_1, λ_2, λ_3 de la courbe C_3^3 sont en ligne droite quand on a

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0.$$

A cause de (2)

$$\overline{\lambda_1\lambda_2}\equiv\overline{\lambda_2\lambda_3}\equiv\overline{\lambda_3\lambda_1}\equiv \mathrm{P}.$$

on aura

$$\mathrm{P}\equiv(\lambda)_3x_1+(\lambda)_2x_2-x_3=0.$$

Pour la droite satellite R_1, nous trouverons de la même manière qu'au n° 4

$$R_1\equiv-8(\lambda)_3x_1+4(\lambda)_2x_2-x_3=0.$$

Désignons par ξ_i et ξ_i' les coordonnées de la droite P ou de la droite R_1 respectivement, nous aurons

$$(23)\qquad \begin{cases} k\xi_1'=-8\xi_1,\\ k\xi_2'=4\xi_2,\\ k\xi_3'=\xi_3.\end{cases}$$

Si la droite P passe par le point $p(y_1, y_2, y_3$ la droite satellite R_1 passera, en vertu des équations (23), par le point $r_1(-y_1, 2y_2, 8y_3)$: on a donc

$$(24)\qquad \begin{cases} \nu y_1'=-y_1,\\ \nu y_2'=2y_2,\\ \nu y_3'=8y_3.\end{cases}$$

---

(1) Ém. Weyr, *Theorie der mehrdeatigen Elementargebilde*. Leipzig, 1870.

(2) Cf. n° 3.

Des équations (23), on déduit immédiatement que le triangle de référence est le triangle des rayons doubles de la transformation homographique, qui renferme les systèmes des droites P et de leurs droites satellites R_1 par rapport à la courbe C_3^3.

Des équations (23), nous avons déduit les équations (24); mais on peut les déduire aussi à l'aide de la substitution transposée en écrivant

$$(24\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} \nu_1 y_1 &= -8y'_1,\\ \nu_1 y_2 &= 4y'_2.\\ \nu_1 y_3 &= y'_3.\end{aligned}\right.$$

On parviendrait aussi à ces équations en employant les coordonnées tangentielles; la courbe C_3^3 serait représentée par l'équation

$$\xi_1^2\xi_3 - \xi_2^3 = 0.$$

16. Pour les coordonnées du point $t \equiv PR_1$, on aura

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho x_1 &= -\ \ \xi_2\xi_3,\\ \rho x_2 &= -3\xi_1\xi_3.\\ \rho x_3 &= 4\xi_1\xi_2.\end{aligned}\right.$$

et, pour les coordonnées de la droite $T \equiv \overline{pr_1}$,

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} \sigma\xi_1 &= 2x_2x_3,\\ \sigma\xi_2 &= 3x_1x_3.\\ \sigma\xi_3 &= x_1x_2.\end{aligned}\right.$$

Les équations (25) établissent l'affinité rationnelle, quadratique et réciproque de la droite P et du point satellite $t \equiv PR_1$.

L'affinité de la même nature du point p et de la droite $\overline{pr_1}$ est déterminée par (26).

Cherchons enfin à déterminer l'enveloppe des satellites successives de la droite P. A cause de

$$k\xi_1(n) = (-8)^n \xi_1,$$
$$k\xi_2(n) = 4^n \xi_2,$$
$$k\xi_3(n) = \xi_3,$$

on trouvera

$$\xi_3 \xi_1^2 - a \xi_2^3 = 0.$$

Le paramètre a dépend des coordonnées de la droite P.

Toutes les droites satellites d'une droite P sont tangentes à une cubique cuspidale, qui est homographique à la courbe donnée C_3^3.