Agrégation des sciences mathématiques. Concours de 1899

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 378-381

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__378_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES. CONCOURS DE 1899.

Mathématiques élémentaires.

1° On considère les coniques ayant une directrice fixe D et passant par deux points fixes A et B. Deux de ces coniques passent par un point donné M et se coupent en un nouveau point M′ qui est dit *associé* au point M.

On demande d'étudier cette association et plus particulièrement :

a. De déterminer les points M tels que les points M′ associés soient indéterminés ;

b. De trouver le lieu des points M tels que chacun d'eux soit confondu avec son associé.

2° Montrer que si le point M décrit une droite quelconque Δ, le point associé M′ décrit en général une hyperbole Γ dont on cherchera les asymptotes. Indiquer les régions de la droite Δ qui correspondent aux deux branches de l'hyperbole.

3° On suppose que la droite Δ est placée de telle sorte que la conique Γ devienne une parabole et l'on propose de trouver le lieu du foyer de cette parabole lorsque Δ se déplace en satisfaisant à cette condition.

4° On suppose que la droite Δ se déplace de telle sorte que les hyperboles Γ correspondantes aient une asymptote commune. On demande, dans ces conditions, de déterminer la courbe enveloppe des axes de symétrie de la conique Γ.

Mathématiques spéciales.

On considère tous les paraboloïdes ayant les mêmes focales qu'un paraboloïde P dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, est

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p} - 2x = 0.$$

On mène à ces paraboloïdes des normales parallèles à un plan Q ayant pour équation

$$ux + vy + wz = 0.$$

1° Démontrer que la surface S, lieu des pieds de ces normales, peut être considérée comme engendrée par une parabole variable dont le plan enveloppe un cylindre parabolique C.

2° Démontrer que les coordonnées d'un point quelconque M de la surface S peuvent être exprimées rationnellement en fonction de deux paramètres ρ, ρ_1 qui fixent la position des plans tangents menés par le point M au cylindre C.

Montrer, à l'aide des expressions ainsi trouvées, que le cylindre C touche la surface S en tous les points d'une cubique.

Montrer, à l'aide des mêmes expressions, que S est une surface réglée du troisième ordre, dont les génératrices rectilignes sont parallèles à celles d'un cône de révolution.

3° La surface S admet une droite double Δ dont on demande les équations.

4° Démontrer que les génératrices rectilignes de la surface S rencontrent, en dehors de la droite double Δ, une autre droite Δ_1 avec laquelle elles font un angle constant. Trouver les équations de cette droite Δ_1.

Remarque. — Parmi les résultats énoncés, quelques-uns peuvent être établis facilement par la Géométrie; on saura gré aux candidats qui ajouteront ce mode de démonstration.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

On donne les deux équations

$$(1)\quad \begin{cases} (x-a)(px+qy-2z)-(z-c)(p-x)=0, \\ (y-b)(px+qy-2z)-(z-c)(q-y)=0, \end{cases}$$

où z désigne une fonction de x et y, p et q les dérivées partielles de z par rapport à x et y.

1° Les quantités a, b, c étant supposées constantes, trouver les intégrales communes aux deux équations (1).

2° On suppose que les quantités a, b, c soient des fonctions données d'un même paramètre λ, c'est-à-dire que le point M dont les coordonnées sont a, b, c décrive une courbe C : dans ces conditions, en éliminant λ entre les deux équations (1), on obtient une équation aux dérivées partielles

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{2}$$

Comment peut-on intégrer cette équation?

3° Démontrer que les courbes caractéristiques de l'équation (2) sont des coniques, et que les développables caractéristiques sont des cônes du second degré; indiquer les principales propriétés de ces systèmes de coniques et de cônes.

4° Soient A un point d'une surface intégrale, B le pôle du plan tangent en A à cette surface par rapport au paraboloïde P ayant pour équation

$$x^2 + y^2 - 2z = 0;$$

démontrer que la droite AB rencontre la courbe C.

5° Sur la droite AB on prend un point N, tel que le rapport anharmonique des points A, N et des deux points de rencontre de la droite AB avec le paraboloïde P soit constant; démontrer que le point N décrit une surface intégrale de l'équation (2).

6° La courbe C étant donnée, déterminer les surfaces intégrales telles que les plans des coniques caractéristiques passent par un point fixe; déterminer les surfaces intégrales dont toutes les caractéristiques ont un système de deux droites.

Mécanique rationnelle.

Une sphère homogène pesante, sans élasticité, de rayon ρ et de masse m, repose immobile sur un plan horizontal fixe parfaitement poli.

Un point matériel pesant, de même masse m que la sphère, vient choquer celle-ci, sous une incidence non nulle, avec une vitesse horizontale connue de grandeur et de direction, puis s'incruste dans la sphère, au point où il l'a frappée, de façon à faire corps avec elle.

1° Trouver l'état des vitesses des divers points du système immédiatement après le choc; déterminer la région dans laquelle le projectile doit frapper la sphère :

a. Pour qu'elle quitte le plan après le choc:

b. Pour qu'elle reste en contact avec le plan.

2° Calculer, dans l'un et l'autre cas, la perte de force vive du système.

3° Trouver le mouvement ultérieur du système, dans le cas où la sphère reste en contact avec le plan.