Nouvelles annales de mathématiques

O. Böklen

Note sur une surface étudiée par Painvin

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 370-372

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__370_1>

[$M^2$91]

NOTE SUR UNE SURFACE ÉTUDIÉE PAR PAINVIN;

PAR M. O. BÖKLEN.

Painvin a examiné le premier (*Nouvelles Annales*, 1864, p. 481) le lieu des foyers des sections centrales d'une surface du second ordre. On peut construire cette surface, qui est du huitième degré, de la manière suivante :

Il y a une infinité d'ellipsoïdes qui ont même section centrale (ou qui passent par la même ellipse) et dont la longueur du grand axe est constante ; les foyers des petits axes de ces ellipsoïdes sont situés sur la surface de Painvin.

On peut ajouter : *Les deux foyers du grand axe de ces ellipsoïdes sont situés sur une surface de l'onde.*

Si $a > \mu > \nu$ sont les demi-axes d'un tel ellipsoïde avec le centre O, et que F_1 et F_2 soient les foyers du grand axe et F_3 celui du petit axe, on a

$$OF_1 = \sqrt{a^2 - \mu^2}, \quad OF_2 = \sqrt{a^2 - \nu^2}, \quad OF_8 = \sqrt{\nu^2 - \mu^2};$$

le dernier foyer est donc imaginaire, mais on détermine sa place sur le petit axe comme s'il était réel.

La démonstration de ces deux propositions est fondée sur un théorème de Chasles et en est une conséquence immédiate (*Aperçu historique*, 1837, Notes XXV et XXXI^b).

Étant donnés un ellipsoïde (E′) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ et un point quelconque M de (E), on construit un second ellipsoïde (E′) sur les normales de (E) et des deux surfaces homofocales (μ) et (ν) qui se coupent au point M; a, μ, ν sont les demi-axes de (F′). Ce second ellipsoïde touche le plan (yz) à l'origine O, et sa section centrale, menée par le point M et parallèle au plan (yz), est une ellipse (e) avec les axes $\sqrt{a^2 - b^2}$ et $\sqrt{a^2 - c^2}$, parallèles aux axes des coordonnées y et z.

Cela posé, transportons l'ellipsoïde (E′) de manière que son centre parcoure la droite MO et que ses axes restent toujours parallèles à eux-mêmes. Dans cette nouvelle situation, l'ellipse (E) viendra dans le plan (yz), et son équation est

$$\frac{y^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{a^2 - c^2} = 1. \tag{1}$$

A chaque point M sur (E) correspond un autre ellipsoïde (E′) qui peut être transporté au point O de la même manière et passera par la même ellipse (e), qui est la section centrale commune à tous les ellipsoïdes transportés. Leurs foyers sont F_1, F_2, F_3, auxquels correspondent les valeurs

$$OF_1 = \sqrt{a^2 - \mu^2}, \quad OF_2 = \sqrt{a^2 - \nu^2}, \quad OF_3 = \sqrt{\nu^2 - \mu^2} \tag{2}$$

Menons par le point O un plan P parallèle au plan tangent de (E) au point M. Ce plan coupe (E) dans une ellipse dont les demi-axes soient $OA > OB$; ils sont parallèles aux tangentes des deux lignes de courbure qui se croisent au point M, et leurs valeurs sont :

$$(3) \qquad OA = \sqrt{a^2 - \nu^2}, \qquad OB = \sqrt{a^2 - \mu^2};$$

d'où

$$OF_0 = \sqrt{\mu^2 - \nu^2}.$$

F_0 est le foyer réel de cette ellipse et, par suite, un point de la surface de Painvin appartenant à la section centrale de (E) qui correspond au plan P.

Mais, d'après l'équation (2), on a $OF_3 = \sqrt{\nu^2 - \mu^2}$, c'est-à-dire le foyer imaginaire F_3 de l'ellipse aux axes μ et ν coïncide avec le foyer réel F_0; cette ellipse est la section principale de (E′), qui contient l'axe moyen 2μ et le petit axe 2ν. Il résulte alors de ce qui précède que son foyer imaginaire F_3, situé sur le petit axe 2ν, appartient à la surface de Painvin.

D'après les équations (2) et (3), on a

$$(4) \qquad OA = OF_2, \qquad OB = OF_1:$$

les foyers F_1 et F_2 sont donc situés sur la surface de l'onde dérivée de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$. Cette seconde partie de ma proposition a été déjà publiée dans ma *Dissertation sur la surface de l'onde* (Reutlingen, 1881), que M. Cornu a bien voulu citer dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* T. I, p. 10; je l'ajoute à cause de son rapport intime avec la première Partie.