COMBEBIAC

Notions élémentaires sur les groupes de transformations

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 347-370

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__347_0>

[J4f]

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES GROUPES DE TRANSFORMATIONS;

Par M. COMBEBIAC.

La théorie des groupes de transformations finis et continus, fondée par M. Sophus Lie, a été exposée par son génial auteur dans un Ouvrage ([1]) qui n'est pas traduit dans notre langue et qui d'ailleurs peut rebuter par sa richesse même.

Nous croyons être utiles à un certain nombre de lecteurs en exposant, réunies par un lien logique et élémentaire, plusieurs des notions principales mises en œuvre dans les travaux de M. Sophus Lie et de ses continuateurs.

I. — Transformations.

On appelle *transformation* l'ensemble de n équations à n variables de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x'_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases}$$

que nous représenterons, pour simplifier, par

$$(1)\qquad x' = f(x).$$

([1]) S. Lie, *Theorie der Transformations Gruppen* T. *in* 3, *Abschnitten,* gr. in-8, Teubner, Leipzig. — I Abschnitt (X, 632 S.), *Allgemeine Eigenschafften,* 1888. — II Abschnitt (VIII, 555 S.), *Berührungs Transformationen,* 1890. — III Abschnitt (XVII, 831 S.), 1893.

Si les variables x représentent, par exemple, un point de l'espace, une transformation fait correspondre à chaque point x un point x'. Telles sont une inversion, une homothétie, une translation, etc.

Si, à la suite d'une transformation S, on effectue une autre transformation S′, on obtient évidemment une nouvelle transformation, que l'on désigne par S′S. Il est facile de se rendre compte que $S''(S'S)$ est identique à $(S''S')S$, c'est-à-dire que la composition des transformations est soumise à la loi associative et, par suite, que l'expression $S''S'S$ a une signification, sans qu'aucune parenthèse soit nécessaire.

Les équations (1) sont solubles par rapport à x_1, x_2, ..., x_n, pourvu qu'il n'existe pas de relations $F(x') = 0$ entre x'_1, x'_2, ..., x'_n, c'est-à-dire pourvu que les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ soient indépendantes, ou encore que le déterminant fonctionnel de ces fonctions ne soit pas nul. Il existe donc généralement une transformation

$$x = \varphi(x')$$

telle que l'application successive de f et de φ ait pour résultat la transformation identique.

En continuant à assimiler la composition des transformations à la multiplication, il est naturel de représenter par l'unité la transformation identique et par S^{-1} la transformation inverse de S.

Il est clair que, dans un produit de transformations, l'ordre des facteurs ne peut pas être changé.

Si les n variables x sont les coordonnées d'un élément ayant une existence réelle, tel qu'un être géométrique : point, plan, droite, sphère, etc., une transformation effectuée sur ces variables peut être interprétée de deux façons :

Elle peut être en effet interprétée comme un changement de coordonnées, l'élément représenté d'abord par x l'étant ensuite par $f(x)$.

Elle peut aussi être interprétée comme une transformation réellement effectuée sur l'élément même représenté par x.

Soit une transformation

$$x' = \mathrm{T}(x).$$

Appliquons aux deux éléments x et x' la transformation

$$y = \mathrm{S}(x).$$

On a

$$\mathrm{S}^{-1}(y') = \mathrm{TS}^{-1}(y)$$

ou

$$y' = \mathrm{STS}^{-1}(y).$$

Si l'on considère S comme représentant un changement de coordonnées, STS^{-1} est l'expression de T dans le nouveau système de coordonnées.

Si S représente une transformation effectuée sur tous les éléments P du domaine considéré, STS^{-1} représente ce que devient T par suite de cette transformation.

On peut retrouver cette expression par une voie plus intuitive :

Cherchons, pour cela, l'élément en lequel se transforme l'élément P dans les nouvelles conditions.

L'élément P, avant l'application de S, se trouvait en $\mathrm{S}^{-1}(\mathrm{P})$, et par suite se transformait par T en $\mathrm{TS}^{-1}(\mathrm{P})$. Par l'application de S à tout le domaine, ce dernier élément devient $\mathrm{STS}^{-1}(\mathrm{P})$. La transformation T est donc devenue STS^{-1} par l'application de S.

Si l'on a

$$\mathrm{STS}^{-1} = \mathrm{T}.$$

T n'est pas changée, et l'on dit que T admet S.

On a alors

$$ST = TS,$$

c'est-à-dire que les transformations S et T sont *commutatives*.

La propriété est réciproque, c'est-à-dire que si T admet S, S admet T.

II. — Séries de transformations. Paramètres essentiels.

Si, dans les équations (1), les fonctions f dépendent de r paramètres $e_1, e_2, \ldots, e_r$, dont nous désignerons l'ensemble par e, ces équations représentent une série composée généralement de ∞^r transformations. Le nombre des transformations différentes serait diminué, s'il était possible de faire varier les paramètres e sans changer les x'. Dans ce cas, il serait possible de remplacer les paramètres par d'autres en nombre moindre, et l'on dirait alors que les r paramètres e ne sont pas essentiels.

A moins de mention contraire, nous supposerons que les paramètres sont essentiels.

III. — Groupes de transformations.

Considérons une série de ∞^r transformations. Si le produit e'' de deux transformations successives e et e' appartient encore à la série, on dit que celle-ci est un *groupe*.

Le groupe est *continu*, si chaque transformation est infiniment voisine de certaines autres et si le groupe ne se divise pas en séries discrètes.

Le groupe est *fini*, si la détermination d'une transformation dans le groupe dépend d'un nombre fini de paramètres.

Il ne sera question dans ce qui va suivre que des groupes finis et continus.

La composition de deux transformations dans un groupe de transformations est représentée par r relations de la forme

$$(2)\qquad \begin{cases} e''_1 = \varphi_1(e_1, e_2, \ldots, e_r;\ e'_1, e'_2, \ldots, e'_r), \\ e''_2 = \varphi_2(e_1, e_2, \ldots, e_r;\ e'_1, e'_2, \ldots, e'_r), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ e''_r = \varphi_r(e_1, e_2, \ldots, e_r;\ e'_1, e'_2, \ldots, e'_r), \end{cases}$$

dont nous représentons l'ensemble par

$$(2)\qquad e'' = \varphi(e, e').$$

Un exemple de groupe de transformations est fourni par l'ensemble des mouvements euclidiens (mouvements sans déformation). En effet, la succession de deux de ces mouvements peut être réalisée par un seul mouvement.

Les équations (2) représentent une opération sur e et e' donnant pour résultat e''.

Cette opération, se confondant avec la multiplication des transformations, admet la loi associative, c'est-à-dire que l'on a

$$\varphi[\varphi(e, e'), e''] = \varphi[e, \varphi(e', e'')].$$

Réciproquement, la condition précédente exprime que les équations (2) sont celles d'un groupe où les variables sont e et les paramètres e'.

En effet, la transformation résultant de l'application successive des deux transformations

$$x' = \varphi(x, e') \qquad \text{et} \qquad x'' = \varphi(x', e'')$$

est

$$x'' = \varphi[\varphi(x, e'), e'']$$

ou

$$x'' = \varphi[x, \varphi(e', e'')].$$

La condition est donc suffisante pour que les équations (2) soient les équations de composition d'un groupe.

IV. — Sous-groupes.

Si, dans un groupe, ∞^m transformations forment entre elles un groupe, celui-ci est dit un *sous-groupe* du premier.

Le groupe euclidien comprend notamment les sous-groupes suivants :

Rotations autour d'un point donné (∞^3 transformations);

Translations (∞^3 transformations);

Rotations autour d'un axe (∞^1 transformations).

V. — Famille de variétés.

Considérons les m équations

$$u_1(x) = \text{const.}, \quad u_2(x) = \text{const.}, \quad \ldots, \quad u_m(x) = \text{const.}$$

Elles représentent une *variété* à $n - m$ dimensions.

Si l'on considère les valeurs des m constantes comme des paramètres, ces équations représentent ∞^m variétés, dont l'ensemble s'appelle une *famille*. Comme le nombre des paramètres est égal à celui des équations, chaque variété est déterminée dans la famille par la connaissance d'un des éléments x qu'elle contient.

Les m quantités $u_1, u_2, \ldots, u_m$ peuvent être considérées comme les coordonnées de la variété. Ces coordonnées sont évidemment en nombre inférieur à n, puisque $n - m$ est le nombre des dimensions de la variété.

En Géométrie, une famille de surfaces comprend ∞^1 surfaces; une famille de lignes comprend ∞^2 lignes. Une famille de lignes s'appelle aussi *congruence*.

Les sphères concentriques forment une famille de surfaces. Il en est de même des quadriques confocales.

VI. — Transivité. Invariants.

On appelle *transitif* un groupe comprenant des transformations susceptibles de faire correspondre à un élément quelconque un élément arbitrairement choisi.

Tel est, en Géométrie, le groupe des translations. Ce groupe sera dit *simplement* transitif, parce qu'il n'existe qu'une translation transformant un point en un autre.

Tout groupe *intransitif,* c'est-à-dire ne possédant pas la propriété qui vient d'être indiquée, présente des *invariants,* c'est-à-dire des fonctions de variables dont la valeur ne change pas quand on applique à ces variables les transformations du groupe.

Soit $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_m(x)$, m invariants indépendants les uns des autres.

Lorsqu'on applique à l'élément x_0 les transformations du groupe, cet élément reste sur la variété représentée par les m équations

$$u_1(x) = u_1(x_0), \qquad u_2(x) = u_2(x_0), \qquad \ldots, \qquad u_m(x) = u_m(x_0).$$

On peut donc dire qu'*un groupe intransitif laisse invariantes des variétés formant une famille.*

Un exemple de groupe intransitif est donné par les rotations autour d'un point. Chaque point de l'espace se déplace en restant sur une sphère ayant pour centre le point fixe. En prenant ce point pour origine d'un système de coordonnées rectangulaires, la famille des surfaces invariantes a pour équation

$$x^2 - y^2 + z^2 = \text{const.}$$

Le groupe ne présente qu'un invariant : $x^2 + y^2 + z^2$.

Le groupe des rotations autour d'une droite est également intransitif. Il présente deux invariants qui sont, en prenant l'axe de rotation pour axe des z, $x^2 + y^2 + z^2$ et z. La famille des variétés invariantes se compose des circonférences parallèles au plan des xy.

Il ne suffit pas, pour qu'un groupe soit transitif, que le nombre de ses paramètres soit égal ou supérieur à celui de ses variables.

C'est ainsi que le groupe des rotations autour d'un point a trois paramètres et est pourtant intransitif.

VII. — Primitivité. Covariants.

On appelle *imprimitif* un groupe conservant une famille de variétés, c'est-à-dire transformant ces variétés l'une dans l'autre.

Soit

$$u_1(x) = \text{const.}, \qquad u_2(x) = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad u_m(x) = \text{const.}$$

les équations de la famille invariante.

On aura, par hypothèse,

$$(3) \qquad \begin{cases} u_1(x') = \mathrm{F}_1[u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)], \\ u_2(x') = \mathrm{F}_2[u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m(x') = \mathrm{F}_m[u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)] \end{cases}$$

ou

$$(3) \qquad u' = \mathrm{F}(u)$$

Ainsi, tandis qu'un groupe intransitif conserve *chaque* variété d'une famille, un groupe imprimitif conserve *l'ensemble* des variétés d'une famille. Un groupe intransitif est donc à plus forte raison imprimitif.

Nous dirons qu'*un groupe intransitif admet une famille de variétés invariantes* et qu'*un groupe imprimitif admet une famille de variétés covariantes*.

On obtient, par exemple, un groupe imprimitif en adjoignant aux rotations autour d'un point les homothéties par rapport à ce point. Les sphères ayant le point fixe pour centre ne sont plus alors invariantes, mais seulement covariantes. On a, en effet, en désignant par K le coefficient d'homothétie,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = K^2(x^2 + y^2 + z^2).$$

Ce groupe conserve aussi la famille des droites issues du point fixe, c'est-à-dire que ces droites sont aussi covariantes.

VIII. — Invariants et covariants simultanés.

L'ensemble de deux éléments à n variables peut être considéré comme un élément à $2n$ variables, et en appliquant les transformations d'un groupe G à chacun des deux éléments, on obtient un groupe à $2n$ variables.

On trouvera généralement ainsi des invariants et des covariants qui ne se présentaient pas quand on ne considérait qu'un seul élément.

C'est ainsi qu'un point n'admet, par rapport au groupe euclidien, ni invariant, ni covariant, tandis que deux points présentent par rapport à ce groupe un invariant, qui est leur distance, et un covariant, qui est la droite qui les joint.

Trois points présentent, en plus, un covariant : le plan qu'ils déterminent.

En prenant un nombre suffisant d'éléments, on arrive forcément à un ensemble qui acquiert par le groupe ∞^r positions différentes. A partir de ce moment, l'adjonction d'un nouvel élément ne peut rien donner de nouveau, puisque sa position sera déterminée par la connaissance de la position des autres éléments.

C'est ainsi que, par rapport au groupe euclidien, pour avoir tous les invariants et covariants indépendants, il suffit de considérer trois points. Si l'on fixe, en effet, leurs positions, aucun mouvement n'est possible, car on a épuisé la transitivité du groupe. En effet, un point peut acquérir ∞^3 positions; une fois celle-ci fixée, un second point peut acquérir ∞^2 positions sur une sphère ayant le premier point pour centre. Enfin la position de ce second point étant fixée, un troisième ne pourra plus que tourner autour de la droite déterminée par les deux premiers. L'ensemble des trois points pourra donc acquérir ∞^6 positions. Le nombre de paramètres du groupe étant six, la transitivité est épuisée.

Pour tout groupe à r paramètres, r est une limite supérieure du nombre des éléments à considérer pour obtenir tous les invariants et covariants simultanés indépendants.

Pour que cette proposition soit prouvée, il suffit de démontrer que les ∞^r transformations du groupe donnent toujours à cet ensemble de r éléments ∞^r positions différentes.

En effet, un élément *quelconque* peut acquérir au moins ∞^1 positions différentes, soit ∞^p, et il existe alors ∞^{r-p} transformations qui donnent à l'élément une même position. Ces ∞^{r-p} transformations donneront à un second élément *quelconque* (si $r - p > 0$) au moins ∞^1 positions, de sorte que l'ensemble de deux éléments pourra acquérir au moins ∞^2 positions. D'une façon générale, *un ensemble de m points, m étant inférieur à r, peut acquérir au moins ∞^m et au plus ∞^r positions.*

Un ensemble de r éléments acquiert donc sûrement ∞^r positions.

IX. — Isomorphisme.

Les équations (3) expriment la manière dont sont transformées l'une dans l'autre les variétés covariantes u, lorsqu'on applique à l'élément x une transformation du groupe G.

Chaque transformation du groupe G détermine une des transformations (3), et ces dernières forment évidemment un nouveau groupe g, dans lequel les variables sont $u_1, u_2, \ldots, u_m$ $(m < n)$.

Mais deux transformations du groupe G peuvent ne pas donner lieu à des transformations du groupe g différentes entre elles, de sorte que g peut présenter un nombre de paramètres essentiels inférieur à celui de G.

Supposons, en effet, que ρ^5 transformations de G conservent chacune des variétés u. A chacune de ces transformations Σ correspondra, dans le groupe g, la transformation identique.

Par exemple, le groupe des similitudes ([1]) autour d'un point admet comme covariant la droite qui joint le point variable au point fixe. Chacune de ces droites reste invariante par les transformations homothétiques, de sorte que les points de l'espace sont transformés par un groupe à quatre paramètres essentiels, et les droites

---

([1]) Nous appelons *similitude* une transformation composée d'une homothétie et d'une rotation autour du centre d'homothétie. Les similitudes forment un groupe à sept paramètres, qui comprend, comme sous-groupe, le groupe euclidien.

en question par un groupe à trois paramètres essentiels.

Si S est une transformation du groupe G ne laissant pas invariantes les variétés u, les ρ^5 transformations de la forme ΣS donneront lieu à la même transformation du groupe g. Le nombre des paramètres essentiels du groupe g est $r - 5$. De plus les ρ^5 transformations forment un groupe, c'est-à-dire un sous-groupe de G.

Il est évident que l'on peut utiliser pour le groupe g les paramètres e et les équations de composition (3) du groupe G, en tenant compte toutefois de ce que ces paramètres peuvent ne pas être essentiels.

Le groupe g est dit *isomorphe* au groupe G.

D'une manière générale, *lorsque à toute transformation e d'un groupe* G *à r paramètres essentiels correspond une transformation η (fût-ce la transformation identique) d'un groupe g possédant un nombre égal ou inférieur de paramètres essentiels, de manière qu'au produit de deux transformations du premier groupe corresponde le produit des deux transformations correspondantes du second, celui ci est dit isomorphe au premier*. L'isomorphisme sera dit *holoédrique*, lorsque le nombre des paramètres essentiels sera le même, et *mériédrique* dans le cas contraire.

L'isomorphisme holoédrique est une propriété réciproque, de sorte que l'on peut parler de deux groupes isomorphes holoédriques. Il n'en est pas de même de l'isomorphisme mériédrique. On dit dans ce cas que le groupe qui a le plus petit nombre de paramètres est isomorphe mériédrique à l'autre groupe.

Deux groupes isomorphes holoédriques peuvent être amenés par un changement de paramètres à avoir les mêmes équations de composition. En effet, par définition, à toute transformation η du second correspond une transformation e du premier de la manière indiquée, et cette correspondance, que l'on peut représenter par r relations

$$e = \Psi(\eta),$$

permet de donner au second groupe les mêmes paramètres qu'au premier.

Si l'isomorphisme était mériédrique, on pourrait bien exprimer les η en fonction des e, mais on ne pourrait pas faire l'inverse.

Il est évident que, dans deux groupes isomorphes, les sous-groupes se correspondent.

Nous citerons, comme exemple d'isomorphisme holoédrique, le cas des trois groupes géométriques suivants :

Groupe projectif sur la droite;
Groupe linéaire homogène spécial dans le plan;
Groupe des rotations autour d'un point dans l'espace.

On dit aussi que deux groupes isomorphes holoédriques ont la même *structure*.

Pour nous, les équations de composition seront la caractéristique de la structure, en ne considérant pas comme différentes les structures résultant de systèmes d'équations susceptibles de se transformer l'un dans l'autre par un changement de paramètres.

X. — Similitude.

Un cas important d'isomorphisme holoédrique est celui de la *similitude*.

Deux groupes ayant le même nombre de variables et le même nombre de paramètres sont *semblables,* quand ils peuvent se transformer l'un dans l'autre par un changement de paramètres et un changement de variables.

Deux groupes semblables sont donc isomorphes holoédriques. Mais cette condition ne suffit pas.

Soient G et G′ deux groupes isomorphes holoédriques ayant le même nombre n de variables.

Soit m le nombre des invariants indépendants dans G, m pouvant être nul. Un élément x_0 peut prendre ∞^{n-m} positions différentes, c'est-à-dire qu'il existe $\infty^{r-(n-m)}$ transformations transformant l'élément x_0 en un élément donné, et, en particulier, en lui-même, ou, d'une manière plus précise, qu'on peut écrire, entre les paramètres e du groupe, $n - m$ relations exprimant la condition pour que la transformation e laisse invariant l'élément x_0. Ces relations contiennent évidemment les coordonnées de l'élément x_0.

Ces $\infty^{r-(n-m)}$ transformations Σ forment évidemment un groupe, qui est un sous-groupe de G. A ce sous-groupe correspond dans G′ un sous-groupe composé d'un même nombre de transformations Σ'.

Supposons maintenant que les deux groupes G et G′ soient semblables, et soit y_0 l'élément correspondant à x_0. Les transformations Σ' conservent, dans ce cas, y_0. Il est donc nécessaire qu'au sous-groupe de G conservant l'élément x_0 corresponde dans G′ un sous-groupe conservant un élément y_0.

Je dis que cette condition est suffisante pour que G et G′ soient semblables.

En effet, si S est une des transformations de G amenant l'élément x_0 en x, toutes les transformations réalisant cette condition sont de la forme $S\Sigma$. Si S′ est la transformation de G′ correspondante à S, $S'\Sigma'$ est la forme générale des transformations de G transformant l'élément y_0 en un certain élément y. On établit ainsi une correspondance entre les éléments x et les éléments y, correspondance qui peut être exprimée par

n relations $y = \Psi(x)$, par lesquelles le groupe G′ s'identifiera au groupe G.

Ainsi *la condition nécessaire et suffisante pour que deux groupes holoédriques isomorphes à un même nombre de variables soient semblables est qu'au sous-groupe de l'un conservant un élément corresponde un sous-groupe de l'autre conservant aussi un élément.*

Moyennant cette condition, parmi les correspondances en nombre généralement infini que l'on peut établir entre les transformations de deux groupes isomorphes, il en existera au moins une permettant d'établir entre les éléments une correspondance ayant les propriétés indiquées.

Il résulte de tout cela que deux groupes holoédriques isomorphes à un même nombre de variables sont toujours semblables, s'ils sont simplement transitifs. Dans ce cas, la seule transformation laissant invariant un élément de position *quelconque* est la transformation identique.

Dans ce cas à un élément x d'un des groupes on peut faire correspondre un élément y arbitrairement choisi dans l'autre. Ensuite à tout élément $S(x)$ correspondra l'élément $S'(y)$, S' étant la transformation correspondante à S.

Soit

$$y = \Psi(x)$$

un changement de variables identifiant les deux groupes, c'est-à-dire transformant chaque transformation S' en sa correspondante S. On a alors, d'après ce qui précède,

$$S'(y) = \Psi S(x),$$

d'où

$$S'\Psi(x) = \Psi S(x).$$

La transformation Ψ satisfait donc à la condition

$$S'\Psi = \Psi S.$$

Il est facile de voir que toute transformation Ψ satisfaisant à cette condition identifie le groupe en y au groupe en x.

Cherchons pour les transformations Ψ un critérium plus précis.

Les $2r$ équations

$$(4)\qquad \begin{cases} x' = S(x), \\ y' = S'(y) \end{cases}$$

représentent une transformation à $2r$ variables.

Supposons qu'on ait opéré un changement de paramètres convenable de manière que S et S' aient les mêmes paramètres. Les transformations formées, comme (4), de deux transformations correspondantes, forment un groupe. Car le produit de deux de ces transformations (S, S') et (S_1, S'_1) sera formé des deux transformations $S_1 S$ et $S'_1 S'$, qui se correspondent par définition de l'isomorphisme.

Ce groupe à $2r$ variables et à r paramètres présente r invariants

$$W_1(xy), \qquad W_2(xy), \qquad \ldots, \qquad W_r(xy).$$

Égalons ces invariants à des constantes, et résolvons par rapport aux r variables y les r équations ainsi obtenues. On obtiendra ainsi une transformation

$$y = \Psi(x),$$

dont la propriété caractéristique sera de rester invariante par la transformation (4), c'est-à-dire que l'on aura

$$S'(y) = \Psi S(x),$$

et par suite

$$S'\Psi = \Psi S.$$

Les transformations Ψ ainsi obtenues sont donc celles qui identifient les deux groupes.

Elles dépendent de r constantes arbitraires que nous pouvons écrire

$$W_1(x_0 y_0), \qquad W_2(x_0 y_0), \qquad \ldots, \qquad W_r(x_0 y_0).$$

Nous pouvons nous donner x_0 et donner à y_0 toutes les positions possibles, soit ∞^r, et nous retrouvons ainsi une propriété déjà énoncée.

XI. — Groupes paramétraux.

Dans les équations de composition d'un groupe

$$e'' = \varphi(e, e'), \tag{2}$$

considérons les e comme variables et les e' comme paramètres. Les équations (2) sont celles d'un groupe simplement transitif à r paramètres, qui est dit *groupe paramétral* du groupe considéré.

En désignant par x la transformation variable, par x' la transformée et par a la transformation qui sert de paramètre, les équations du groupe peuvent être représentées par

$$x' = ax.$$

Ce groupe est évidemment isomorphe à tous les groupes par rapport auxquels il joue le rôle de groupe paramétral.

Il existe un second groupe paramétral jouissant des mêmes propriétés que le premier :

$$y' = yb.$$

Les deux groupes paramétraux sont isomorphes. Faisons, en effet, correspondre à chaque transformation a du premier la transformation b du second déterminée par

$$b = a^{-1}.$$

Aux deux transformations du premier groupe

$$x' = ax, \qquad x' = a'x,$$

correspondent, dans le second groupe,

$$y' = ya^{-1}, \qquad y' = ya'^{-1}.$$

Le produit des deux premières est la transformation

$$x' = (a'a)x.$$

Le produit des deux secondes est

$$y' = y(a^{-1}a'^{-1}),$$

ou

$$y' = y(a'a)^{-1}.$$

C'est bien la transformation correspondant à $a'a$.

Les deux groupes étant tous les deux simplement transitifs sont semblables.

Pour les transformer l'un dans l'autre, il suffit d'opérer les changements de variables et de paramètres suivants :

$$y = x^{-1}, \qquad b = a^{-1}.$$

Ce que nous venons d'exposer suppose que le groupe considéré comprend les inverses de toutes ses transformations.

Nous ne nous occuperons pas des groupes ne présentant pas cette propriété. Un de ces groupes, par exemple, est le groupe à une variable et à un paramètre qui a pour équation

$$x' = ax,$$

avec la condition $a > 1$.

Chacun des groupes paramétraux est évidemment simplement transitif.

Réciproquement, tout groupe simplement transitif peut, par un simple changement de variables, être mis sous la forme d'un groupe paramétral. Un groupe simplement transitif est, en effet, semblable (X) à son groupe paramétral, auquel il est isomorphe.

Appliquons les deux groupes paramétraux au même système de variables z, c'est-à-dire prenons les équations des deux groupes sous la forme

$$z' = az \qquad \text{et} \qquad z' = zb.$$

En appliquant successivement ces deux transformations, on obtient, quel que soit l'ordre adopté, la transformation suivante

$$z' = azb.$$

Les deux transformations sont donc commutatives, c'est-à-dire (I) que chacune d'elles admet l'autre.

Réciproquement, on démontre qu'une transformation commutative à toutes les transformations de l'un des groupes fait partie de l'autre.

D'une façon générale, *les transformations commutatives à toutes celles d'un groupe simplement transitif forment également un groupe simplement transitif*.

La relation entre les deux groupes étant réciproque, on qnalifie ces deux groupes de *réciproques*.

Dans un groupe simplement transitif G, un sous-groupe g à m paramètres, c'est-à-dire composé de ∞^m transformations, donne à l'élément variable ∞^m positions différentes et, par suite, laisse invariantes ∞^{n-m} variétés à m dimensions.

Il résulte de ce que chaque transformation d'un groupe simplement transitif admet le groupe simplement transitif réciproque, que les variétés invariantes par rapport à un sous-groupe g de l'un G sont transformées l'une dans l'autre par le groupe réciproque G', et réciproquement un covariant de l'un caractérise une famille de variétés invariantes par rapport à un sous-groupe de l'autre.

On a donc la proposition :

Étant donnés deux groupes G *et* G' *simplement transitifs réciproques, les sous-groupes de l'un et les covariants de l'autre se correspondent.*

XII. — Groupes de structure donnée.

Pour connaître tous les groupes semblables entre eux, il suffit d'en connaître un, car tous les autres seront obtenus par des changements de variables et de paramètres.

Il est facile de voir qu'un groupe intransitif peut toujours être obtenu au moyen d'un groupe transitif isomorphe, en adjoignant aux équations de ce dernier un certain nombre d'autres équations formées de variables égalées à des constantes, et en opérant ensuite un changement de variables. Les variables égalées à des constantes seront les invariants du groupe intransitif.

Les groupes intransitifs sont donc déterminés quand on connaît les groupes transitifs de même structure.

Je dis que *tout groupe transitif est semblable à un groupe transformant un covariant du groupe paramétral.*

Soit G un groupe transitif à n variables et à r paramètres.

Nous avons vu (VIII) qu'il existe un nombre $p < r$ tel qu'un ensemble de p éléments x prend par le groupe ∞^r positions différentes.

On peut représenter les ∞^r transformations de G par les ∞^r positions d'un de ces ensembles. Ces ∞^r positions forment une variété à r dimensions dans la variété à np dimensions qui comprend la totalité des ensembles de p éléments.

Ces ∞^r positions sont transformées par un groupe Γ simplement transitif, isomorphe holoédrique à G et semblable aux groupes paramétraux de G, et chaque groupe relatif à un covariant de Γ sera semblable à un groupe dérivant d'une manière analogue de chaque groupe paramétral et réciproquement.

Nous pouvons choisir pour les variables du groupe Γ un système comprenant les coordonnées x de l'élément de G. Ces coordonnées caractérisent une variété, savoir celle qui est formée par les ensembles comprenant l'élément x.

Cette variété est covariante dans le groupe Γ, de sorte que le groupe par lequel elle est transformée, c'est-à-dire le groupe G, doit être semblable à un groupe relatif à un covariant de chacun des groupes paramétraux de G.

En résumé, *tous les groupes de structure donnée seront déterminés, si l'on connaît tous les groupes transitifs, et l'on obtiendra ceux-ci en recherchant les covariants d'un des groupes paramétraux. Enfin* (XI), *chacun de ces covariants est déterminé par un sous-groupe du groupe paramétral réciproque.*

Remarquons que cette marche peut donner lieu à des groupes isomorphes mériédriques aux groupes cherchés.

XIII. — Groupe adjoint. Transformations distinguées.

Les propriétés suivantes ne dépendent que de la structure.

On pourra donc faire abstraction des éléments auxquels s'appliquent les groupes et, par suite, identifier les groupes isomorphes holoédriques.

Nous savons (I) que STS^{-1} représente la transformation en laquelle est transformée T par l'effet de S.

Si S et T appartiennent à un groupe G à r paramètres, la transformation précédente fera aussi partie du groupe, de sorte que l'équation

$$T' = STS^{-1}$$

représentera une transformation à r variables, qui seront les paramètres de T.

Ces transformations forment un groupe isomorphe à G. Cela résulte de l'identité

$$S'STSS'^{-1} \equiv S'ST(S'S)^{-1}.$$

Ce groupe s'appelle le *groupe adjoint* à G.

On appelle transformations *distinguées* du groupe G les transformations commutatives avec toutes celles du groupe. Les transformations distinguées forment elles-mêmes un groupe, car le produit de deux transformations distinguées présente évidemment la même propriété.

A chaque transformation distinguée du groupe G correspond dans le groupe adjoint la transformation identique, de sorte que, si ∞^ρ est le nombre des transformations distinguées, le groupe adjoint a seulement $\infty^{r-\rho}$ paramètres essentiels.

XIV. — Types de sous-groupes.

Une transformation du groupe adjoint transforme un sous-groupe en un autre sous-groupe. Cela résulte de l'identité

$$STS^{-1}ST'S^{-1} \equiv STT'S^{-1}.$$

Le groupe adjoint transforme, en général, un sous-groupe en une infinité de sous-groupes.

Ces sous-groupes sont dits du même *type*.

Les sous-groupes conservés par le groupe adjoint sont dits *groupes invariants*. Un sous-groupe invariant est donc, par définition, le seul de son type.

On peut considérer une transformation comme un cas particulier de sous-groupe et appeler du même type les transformations que le groupe adjoint transforme les unes dans les autres.

Les transformations d'un même type forment, d'après la définition même, une variété invariante par rapport au groupe adjoint.

Nous ferons l'application de cette terminologie au groupe des similitudes, dont il a déjà été question (IX).

Une transformation de ce groupe conserve un point de l'espace à distance finie ou infinie et une droite passant par ce point. Elle est déterminée par la connaissance du point fixe, de la direction de la droite fixe, du coefficient d'homothétie et de l'angle de rotation.

Le groupe ne comprend pas de transformations distinguées; aussi le groupe adjoint a-t-il le même nombre de paramètres que le groupe lui-même, c'est-à-dire lui est isomorphe holoédrique.

Le coefficient d'homothétie et l'angle de rotation sont des invariants du groupe adjoint. Le point et la direction fixes en sont des covariants.

Le centre de similitude considéré comme covariant relatif au groupe adjoint est transformé par un groupe à sept paramètres, qui n'est autre que le groupe de similitude lui-même.

La direction fixe est transformée par un groupe qui n'a que trois paramètres essentiels.

Les sous-groupes invariants sont le groupe euclidien et le groupe des homothéties, qui ont en commun les translations.

Les invariants du groupe adjoint déterminent les types de transformations, de sorte que les transformations d'un même type sont celles qui ont le même coefficient d'homothétie et le même angle de rotation.

Citons les sous-groupes suivants :

Similitudes concentriques;

Similitudes coaxiales;

Homothéties concentriques;

Rotations coaxiales;

Etc.