NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LÉON AUTONNE

Sur le rapport anharmonique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 341-346

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__341_0>

[K7a]

SUR LE RAPPORT ANHARMONIQUE;

PAR M. LÉON AUTONNE.

1. On sait que le rapport anharmonique K de quatre quantités x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) est susceptible de six valeurs K_j ($j = 0, \ldots, 5$), en général différentes, toutes fonctions d'une quelconque d'entre elles. On trouvera dans Clebsch (*Leçons sur la Géométrie,* traduction A. Benoist, t. I, p. 49 et suiv.) une discussion des relations qui existent entre les K_j. Je me propose de reprendre la question en insistant sur les liens qui unissent la théorie à celle des groupes de substitutions entre quatre lettres. La terminologie et les notations seront celles de M. Jordan, classiques en matière de substitutions.

2. Soit G le groupe des 24 substitutions entre 4 lettres. On peut se représenter comme suit la constitution de G. Un groupe g contient les quatre substitutions

$$1, \qquad \alpha = (12)(34), \qquad \beta = (13)(24), \qquad \alpha\beta = \beta\alpha = (14)(23).$$

g est permutable à $\delta = (4)(123)$. Combinant g et δ, on a le groupe alterné G' de 12 substitutions. G' est permutable à $\varepsilon = (1)(4)(23)$. G' et ε fournissent G. g est permutable à ε. g et ε fournissent un groupe h d'ordre huit. Il existe trois pareils groupes h, h', h'' que δ permute circulairement.

3. Désignons par (ij) la différence $x_i - x_j$ et po-

sons (Clebsch, *loc. cit.*, p. 49)

$$\frac{(31)(42)}{(32)(41)} = K_0; \qquad \frac{(12)(43)}{(13)(42)} = K_1 = \frac{K_0 - 1}{K_0};$$

$$\frac{(23)(41)}{(21)(43)} = K_2 = \frac{1}{1 - K_0}; \qquad \frac{(21)(43)}{(23)(41)} = K_3 = 1 - K_0 = \frac{1}{K_2};$$

$$\frac{(13)(42)}{(12)(43)} = K_4 = \frac{1}{K_1} = \frac{K_0}{K_0 - 1}; \qquad \frac{(32)(41)}{(31)(42)} = K_5 = \frac{1}{K_0}.$$

Les déplacements des six lettres K_j forment un groupe $\mathfrak{K}$, lequel est isomorphe à G avec hémiédrie. A la substitution unité de $\mathfrak{K}$ correspond dans G le groupe g; à δ et ε correspondent respectivement dans $\mathfrak{K}$

$$D = (012)(543),$$
$$E = (03)(14)(25).$$

$\mathfrak{K}$ est d'ordre six, car $E^{-1}DE = D^2$, le groupe des puissances de D est permutable à E.

g est, comme il le faut, contenu dans G et permutable à ses substitutions.

4. A $\mathfrak{K}$ est isomorphe holoédriquement un groupe Λ linéaire binaire. Posons

$$\tau_1 = (23)(14), \qquad \tau_2 = (31)(24). \qquad \tau_3 = (12)(34)$$

$\left(\text{d'où } \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0,\ K_0 = -\dfrac{\tau_2}{\tau_1}\right)$ et ensuite

$$\lambda_1 = \tau_2 - \theta\tau_1. \qquad \lambda_2 = \tau_2 - \theta^2\tau_1.$$

θ = racine primitive cubique de l'unité. Λ dérivera des deux substitutions linéaires homogènes binaires

$$d = |\,\lambda_1 \quad \lambda_2 \qquad \theta^2\lambda_1 \quad \theta\lambda_2\,|,$$
$$e = |\,\lambda_1 \quad \lambda_2 \qquad \lambda_2 \quad \lambda_1\,|,$$

qui correspondent respectivement à D et E. On voit que d est mise sous forme canonique.

5. Nommons X l'équation du quatrième degré

$$o = f(x) = \prod_i (x - x_i) = x^4 - 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4$$

dont les x sont racines. Tant que les x et K sont quelconques, G est le groupe de X. Introduisons (Clebsch, *loc. cit.*, p. 284) les deux invariants

$$\begin{aligned} I &= 2(a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2), \\ J &= 6(a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_2^3 - a_3^2 - a_1^2a_4) \end{aligned}$$

et l'invariant absolu $\Omega = I^3J^{-2}$ du polynome $f(x)$. On aura (Clebsch, *loc. cit.*, p. 297) les équations

$$(\Phi) \quad \begin{cases} F(\Omega, K) = \Omega[(K+1)(K-2)(1-2K)]^2 \\ \qquad\qquad\qquad - 24(K^2 - K + 1)^3 = o, \end{cases}$$

ou encore

$$(\Psi) \qquad \mathcal{F}(\Omega; \lambda_1, \lambda_2) = \Omega(\lambda_1^3 + \lambda_2^3)^2 - 24\lambda_1^3\lambda_2^3 = o.$$

Pour Ω donné, les six racines de Φ sont les K_j. $\mathfrak{K}$ est le groupe de Φ. Toutes les substitutions de $\mathfrak{K}$ déplacent toutes les racines; cela devait être, car tous les K_j s'expriment rationnellement en K_0. La connaissance des K_j, c'est-à-dire la résolution de Φ, réduit le groupe G de X aux substitutions qui laissent tous les K invariables, c'est-à-dire au groupe g.

Quand une figure de géométrie P, composée de quatre éléments, est définie par le rapport anharmonique K, il est en général inutile et gênant quelquefois d'avoir à distinguer les six valeurs de K. On opérera de préférence sur l'invariant absolu Ω, qui donne la véritable mensuration de P.

6. Les considérations précédentes subissent de sensibles modifications pour des valeurs particulières des K. Pour faire la discussion, j'examine la structure du

groupe $\mathfrak{R}$ et ce qu'elle peut éventuellement devenir. $\mathfrak{R}$ dérive de D et E. Peut-il perdre D ou E? Autrement dit, D ou E peuvent-elles, pour un choix approprié des K, se réduire à l'unité.

Cela ne serait pas difficile à exprimer, mais il est encore plus rapide d'opérer sur le groupe Λ (4), c'est-à-dire sur les substitutions d et e, et d'exprimer que $d = 1$ et $e = 1$.

7. Pour que $d = 1$, il faut et il suffit que $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$. Si $\lambda_1 = 0$, $\tau_2 = \theta\tau_1$, $K_0 = -\frac{\tau_2}{\tau_1} = -\theta$; si $\lambda_2 = 0$, de même $K_0 = -\theta^2$. Dans les deux hypothèses

$$K_0^2 - K_0 + 1 = 0.$$

On sait que c'est le cas dit *équianharmonique*. Alors

$$K_0 = K_1 = K_2 = -\theta, \qquad K_3 = K_4 = K_5 = -\theta^2.$$

Les K_j se répartissent en deux systèmes de trois valeurs égales.

8. Pour que $e = 1$, il faut et il suffit que ou $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ ou $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$. Si

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0 = 2\tau_2 + \tau_1, \qquad K_0 = -\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{1}{2},$$

alors

$$K_0 = K_3 = \tfrac{1}{2}, \qquad K_1 = K_4 = -1, \qquad K_2 = K_5 = 2.$$

Les six K_j se répartissent en trois couples de valeurs égales. On sait que c'est le cas dit *harmonique*.

Si

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \tau_1 = 0, \qquad K_0 = -\frac{\tau_2}{\tau_1} = \infty, \qquad \tau_1 = (23)(14) = 0,$$

deux des quatre x_i sont égales. Alors

$$K_0 = K_3 = \infty, \qquad K_1 = K_4 = 1, \qquad K_2 = K_5 = 0.$$

Nous dirons que c'est le *cas d'égalité*. Les K_j se répartissent comme dans le cas harmonique.

9. Dans les cas harmonique et d'égalité, $\mathfrak{K}$ se réduit à D et cesse d'être transitif. Φ devient réductible. Effectivement, dans le cas harmonique (5),

$$J = 0, \qquad \Omega = \infty, \qquad F = [(K+1)(K-2)(1-2K)]^2,$$

les racines sont bien $\frac{1}{2}$, 2, -1, chacune double. Dans le cas d'égalité, le discriminant $I^3 - 6J^2$ de X est nul, $\Omega = 6$, l'équation Ψ (5) devient

$$\mathcal{F} = (\lambda_1^3 - \lambda_2^3)^2 = (\tau_1\tau_2\tau_3)^2 = 0.$$

Les valeurs racines de $K_0 = -\tau_2 : \tau_1$ sont bien ∞, 1, 0, chacune double.

Dans le cas équianharmonique, $\mathfrak{K}$ se réduit à E et cesse d'être transitif. X est encore réductible. Alors en effet

$$F = (K^2 - K + 1)^3 = 0,$$

car $I = \Omega = 0$, les deux racines $-\theta$ et $-\theta^2$ sont triples.

10. Dans les trois cas particuliers (équianharmonique, harmonique, d'égalité) les quatre x ne sont plus simultanément arbitraires. Le groupe de l'équation X du 5 n'est plus le groupe général entre quatre lettres.

Pareillement, il n'est plus licite d'opérer entre les x tous les déplacements possibles. Soit S le système des relations qui existent entre les x; on ne pourra opérer sur les x d'autres déplacements que ceux vis-à-vis desquels S possède la propriété de l'invariance. Soit G_1, contenu dans G, le groupe de ces déplacements; nommons encore $\mathfrak{K}$ le groupe des déplacements des K_j. Les relations entre G_1 et $\mathcal{R}$ seront tout autres qu'au numéro 3.

11. *Cas équianharmonique.* — Le système S est formé (n° 7) par l'unique équation $\lambda_1 = \tau_2 - \theta\tau_1 = 0$. ε changeant λ_1 en λ_2, on devrait avoir aussi

$$\lambda_2 = \tau_2 - \theta^2\tau_1 = 0,$$

d'où $\tau_1 = \tau_2 = 0$, c'est-à-dire le cas d'égalité. Cela est absurde; ε est exclue de G_1, qui se réduit au groupe alterné G'. Il n'existe dans G' aucune substitution qui fasse passer de K_0 à K_3. Au contraire, $\mathcal{R}$ se réduit à la substitution (K_0K_3)ou E.

12. *Cas harmonique.* — Le système S est formé (8) par l'équation $2\tau_2 + \tau_1 = 0$, c'est-à-dire $\tau_2 = \tau_3$. δ permute circulairement les τ et, si l'on admettait δ dans G_1, on aurait $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$, c'est-à-dire, en vertu de $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$, $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$; c'est le cas d'égalité. Ainsi δ est exclue de G_1, qui dérive de g et de ε, c'est-à-dire coïncide avec h (2). Au contraire, $\mathcal{R}$ se réduit à $D = (K_0K_1K_2) = (\frac{1}{2}, -1, 2)$ (8).

13. *Cas d'égalité.* — Le système S comprend par exemple (8) l'équation $(14) = x_4 - x_1 = 0$. G_1 ne peut provenir que des transpositions $(14)(23)$, c'est-à-dire des substitutions $\alpha\beta$ et ε (2). Au contraire, $\mathcal{R}$ se réduit à $D = (K_0K_1K_2) = (\infty, 1, 0)$.

14. Je n'approfondirai pas davantage la présente discussion, laquelle se confond désormais avec celle de l'équation du quatrième degré, matière bien connue.