Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 334-340

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__334_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1739.

(1896, p. 392.)

On donne une ellipse de centre O. On mène une corde quelconque ab et l'on prend son pôle c par rapport à l'ellipse. Le point p étant la projection sur Oc de l'orthocentre du triangle abc, démontrer que le produit de op par oc est égal à la somme des carrés des demi-axes de l'ellipse donnée. (MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. E. DUPORCQ.

Cette propriété est une conséquence immédiate du théorème qui fait l'objet de la question 1659, résolue à la page 150 de ce Recueil : le point c et l'orthocentre h du triangle abc sont conjugués par rapport au cercle orthoptique de l'ellipse donnée.

En voici une autre démonstration :

Considérons les triangles ca_1b_1 et ca_2b_2 formés par les côtés ca et cb, et par les tangentes a_1b_1 et a_2b_2 à l'ellipse, parallèles à la corde ab; soient h_1 et h_2 leurs orthocentres. Les points h, h_1 et h_2 sont, sur le plan de la figure, les projections des points H, H_1 et H_2 d'où l'on voit respectivement sous des angles droits les côtés des triangles cab, ca_1b_1 et ca_2b_2, et le point H est évidemment le conjugué harmonique du point c rapport au segment H_1H_2. D'autre part, d'après un théorème de M. Faure, les cercles conjugués aux triangles

ca_1b_1 et ca_2b_2, cercles harmoniquement circonscrits à l'ellipse, coupent orthogonalement son cercle orthoptique : ces cercles ont, d'ailleurs, pour centres les points h_1 et h_2, et les carrés de leurs rayons sont égaux et de signes contraires aux carrés des segments h_1H_1 et h_2H_2 : de là résulte que les points H_1 et H_2 se trouvent sur la sphère qui admet le cercle orthoptique pour grand cercle. Le plan polaire du point c, par rapport à cette sphère, contient donc le point H, et le point h se trouve, par suite, sur la polaire du point c par rapport au cercle orthoptique.

SOLUTION

Par M. A. Boulanger.

L'ellipse étant rapportée à ses axes, soient x, y les coordonnées du point C. L'orthocentre H du triangle formé par les tangentes à l'ellipse issues de C et, par la corde des contacts, a pour coordonnées

$$\xi = \frac{x(a^2b^2+b^4+c^2y^2)}{a^2y^2+b^2x^2}, \qquad \eta = \frac{y(a^2b^2+a^4-c^2y^2)}{a^2y^2+b^2x^2}.$$

(*Voir* par exemple : Kœhler, *Exercices de Géométrie*, première Partie, p. 29.)

Le produit $OP \times OC$ est la puissance de l'origine par rapport au cercle décrit sur CH comme diamètre, laquelle a pour valeur

$$x\xi + y\eta,$$

c'est-à-dire, en effectuant, a^2+b^2. C. Q. F. D.

Autres solutions de MM. E.-N. Barisien, Dulimbert, H. Lez, E. Malo, A. Provost, E. Taratte, la plupart analytiques.

Question 1740.

(1896, p. 392)

Étant donnée une quadrique, trouver les quadriques qui la coupent orthogonalement. (A. Pellet.)

SOLUTION

Par M. A. Boulanger.

Soit

(1) $$f(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une quadrique orthogonale à l'ellipsoïde rapporté à ses axes,

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

En exprimant l'orthogonalité des deux surfaces en tous les points de leur ligne commune, il vient la relation

$$(3) \qquad \frac{xf'_x}{a^2} + \frac{yf'_y}{b^2} + \frac{zf'_z}{c^2} = 0.$$

Les points communs aux quadriques (1) et (2) devant être situés sur la quadrique (3), on a l'identité

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = xf'_x\left(\frac{\lambda}{a^2} + \mu\right) + yf'_y\left(\frac{\lambda}{b^2} + \mu\right) + zf'_z\left(\frac{\lambda}{c^2} + \mu\right) + \mu t f'_t,$$

t désignant une variable d'homogénéité (théorème d'Euler).

Cette identité montre de suite que la fonction du deuxième degré, $f(x, y, z)$, ne contient pas de termes du premier degré ni de doubles produits. En l'explicitant, il vient de suite

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2 + k} + \frac{y^2}{b^2 + k} + \frac{z^2}{c^2 + k} - 1 = 0,$$

où l'on a posé

$$k = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Les quadriques orthogonales sont donc les quadriques homofocales à l'ellipsoïde donné.

Solution analogue pour le paraboloïde.

Question 1741.

(1896, p. 392.)

Soit

$$z = f(x, y)$$

l'équation en coordonnées rectangulaires d'un hélicoïde développable quelconque dont le cône directeur a pour axe oz; *démontrer que toute surface-moulure peut être représentée par l'équation*

$$F(z) = f(x, y).$$

(TH. CARONNET.)

SOLUTION

Par M. A. Boulanger.

Une surface-moulure S dont le noyau C est parallèle à oz est coupée par le plan $z = h$ suivant une développante D de la section droite de C. Soit $\zeta = \varphi(\xi)$ l'équation de la génératrice de S, rapportée à une droite de son plan $\omega\zeta$ parallèle à oz et à la trace de son plan sur xoy, trace qui roule sur la base de C. Si l'on compte les arcs σ de cette base à partir du point où ω vient se placer dessus, le point de rebroussement de Δ sera situé sur la génératrice de C définie par $\varphi(\sigma) = h$.

Un hélicoïde développable H dont la directrice est située sur C est coupé par un plan $z = k$ suivant une développante de la section droite de C, dont le point de rebroussement est situé sur l'hélice directrice, c'est-à-dire sur la génératrice de C définie par $a\sigma = k (a = \text{pas})$.

Les deux sections auront même projection sur xoy si les points de rebroussement sont situés sur la même génératrice de C, c'est-à-dire si

$$h = \varphi\left(\frac{k}{a}\right),$$

d'où l'on tire

$$k = F(h).$$

Dès lors, si

$$z = f(x, y)$$

est l'équation de H, la projection commune des deux sections aura pour équation

$$f(x, y) = k = F(h),$$

et S sera représentée par l'équation

$$f(x, y) = F(z).$$

C. Q. F. D.

Question 1748.

(1896, p. 488.)

Si une conique est inscrite à un triangle ABC *en* α, β, γ *les droites joignant les milieux de* BC, CA, AB *aux milieux de* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *concourent au centre de la courbe. Étant donnés le centre d'une conique et trois tangentes, trouver les points de contact.* (P. Sondat.)

SOLUTION

Par M. R. Gilbert.

Considérons les coniques tangentes aux côtés de ABC, touchant BC en un point fixe α; elles font partie d'un faisceau tangentiel, donc leurs centres sont en ligne droite; parmi ces coniques se trouvent les coniques aplaties BC et Aα; d'où suit la première partie.

Soit O le centre d'une conique inscrite au triangle ABC en α, β, γ : la droite MO (M étant le milieu de BC) coupe Aα en son milieu : donc la parallèle à MO, à la même distance de MO que le point A, coupe BC en α.

Autres solutions par MM. A. Droz-Farny, E.-A. Majol, A. Provost.

Question 1766.

(1897, p. 243.)

On donne un cylindre de révolution et un cône dont l'axe de révolution est parallèle aux génératrices du cylindre. On déplace un cône de grandeur constante, dont l'axe de révolution reste parallèle aux génératrices du cylindre, de façon que son sommet décrive la courbe d'intersection du cylindre et du cône donnés. On demande l'enveloppe de la trace de ce cône mobile sur un plan de section droite du cylindre. (Mannheim.)

SOLUTION

Par M. Dulimbert.

Je prends pour axe des z l'axe du cylindre, pour plan des xy le plan de section droite du cylindre qui passe par le sommet du cône, pour plan des zx le plan des axes des deux surfaces. Il s'agit de trouver l'enveloppe de la trace du cône mobile sur le plan des xy.

L'équation du cylindre est

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

celle du cône

$$(x - a)^2 + y^2 - h^2 z^2 = 0.$$

Je prends un point M de la section du cylindre par le plan des xy. Les coordonnées de ce point sont

$$x = R\cos\omega,$$
$$y = R\sin\omega,$$
$$z = 0.$$

Il est la projection de deux points de la courbe d'intersection situés dans les plans symétriques par rapport aux xy

$$z^2 = \frac{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}{h^2}.$$

Donc le carré du rayon du cercle, trace du cône mobile sur le plan des xy, est égal à

$$\lambda^2(a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta),$$

en désignant par λ le rapport des tangentes des angles générateurs du cône mobile et du cône fixe.

L'équation du cercle enveloppé est donc

$$(x - R\cos\theta)^2 + (y - R\sin\theta)^2 = \lambda^2(a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta)$$

ou

$$x^2 + y^2 - 2R\cos\theta(x - \lambda^2 a) - 2Ry\sin\theta$$
$$+ R^2 - \lambda^2(a^2 + R^2) = 0.$$

Il est évident que la puissance du point C dont les coordonnées sont

$$x = \lambda^2 a,$$
$$y = 0,$$

par rapport à un cercle quelconque du faisceau est constante et égale à

$$(\lambda^2 a^2 - R^2)(\lambda^2 - 1).$$

Donc l'enveloppe cherchée est la courbe anallagmatique enveloppe d'un cercle dont le centre décrit le cercle de section droite du cylindre donné et qui coupe orthogonalement le cercle fixe ayant pour centre le point C et pour rayon

$$\sqrt{(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 a^2 - R^2)}.$$

Pour avoir l'équation de la courbe, je transporte l'origine au point C. L'équation du cercle enveloppé devient

$$(x + \lambda^2 a - R\cos\theta)^2 + (y - R\sin\theta)^2$$
$$= \lambda^2(a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta),$$

ou, en développant et réduisant,

$$x^2 + y^2 + 2\lambda^2 a x - 2 R x \cos\theta$$
$$+ (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 a^2 - R^2) - 2 R y \sin\theta = 0.$$

En coordonnées polaires, l'équation du cercle est

$$\rho^2 + 2\lambda^2 a \rho \cos\omega + (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 a^2 - R^2)$$
$$- 2 R \rho \cos\omega \cos\theta - 2 R \rho \sin\omega \sin\theta = 0.$$

L'équation de l'enveloppe s'obtient immédiatement. Elle est

$$\rho^2 + 2\rho(\lambda^2 a \cos\omega \pm R) + (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 a^2 - R^2) = 0,$$

ou en coordonnées cartésiennes

$$[x^2 + y^2 - 2\lambda^2 a x + (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 a^2 - R^2)]^2 - 4 R^2 (x^2 + y^2) = 0.$$