Nouvelles annales de mathématiques

Concours d'admission à l'École normale supérieure en 1899

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 332-334

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__332_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1899.

Mathématiques.

On donne trois axes rectangulaires $Oxyz$ et l'on considère les surfaces S ayant pour équation générale

$$(S)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{a+\lambda a'}+\frac{y^2}{b+\lambda b'}+\frac{z^2}{c+\lambda c'}\\ &\quad=\frac{m^2}{a+\lambda a'}+\frac{n^2}{b+\lambda b'}+\frac{p^2}{c+\lambda c'};\end{aligned}\right.$$

a, b, c, a', b', c', m, n, p sont des constantes données et γ un paramètre variable.

I. 1° Soit P le plan polaire d'un point $A(x_0, y_0, z_0)$ par rapport à une surface S. Lorsque λ varie, A restant fixe, le plan P passe par un point fixe B et enveloppe un cône du second degré C. Ce cône peut-il se décomposer? Soit C′ le cône parallèle à C et de sommet O. Que peut-on dire de commun aux cônes C′ qui correspondent aux divers points A de l'espace?

2° On suppose que le point A décrive un plan Π; le point B décrit une surface qui est, en général, du troisième degré; ce degré peut-il s'abaisser pour des positions particulières du plan Π?

On suppose que le point A décrive une quadrique Q; le point B décrit une surface, en général du sixième degré; dans quel cas cette surface est-elle une quadrique Q′? Lorsqu'il en est ainsi, si Q est un cône, il en est de même de Q′, et réciproquement.

3° On s'astreint à ne considérer que des quadriques Q, Q′ ne se décomposant pas, et dont la seconde est décrite par le point B quand le point A décrit la première; soient ω le centre de Q, ω' le centre de Q′. Lorsqu'on donne ω, le point ω' peut-il occuper une position quelconque dans l'espace, ou est-il assujetti à rester sur une courbe, ou sur une surface?

II. 1° On pose $a = \alpha^2$, $b = \beta^2$, $c = \gamma^2$, $a' = 1$, $b' = 1$, $c' = 0$, $m = 0$, $n = 0$, $p = \gamma$, en sorte que l'équation des surfaces S devient

$$(\Sigma) \qquad \frac{x^2}{\alpha^2 + \lambda} + \frac{y^2}{\beta^2 + \lambda} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1;$$

les résultats des paragraphes précédents sont-ils modifiés?

2° Montrer que par un point A passent deux surfaces Σ réelles, et déterminer leur nature suivant la position de A.

3° Étant donné un plan M, il existe une seule surface Σ tangente au plan M; soit I le point de contact : par le point I passent deux surfaces Σ, dont l'une est tangente au plan M, et la seconde à un autre plan N. Ce plan est ainsi déterminé lorsqu'on donne le plan M.

On suppose que le plan M soit assujetti à passer par un point fixe P; le plan N dépend alors de deux paramètres. Lieu du pôle du plan N par rapport à la sphère dont l'équation est $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. (On ne demande pas de discuter ce lieu, mais d'indiquer tout au moins d'une manière précise les opérations à faire pour avoir son équation.) Quelle position doit occuper le point P pour que ce lieu se réduise à un plan?

N. B. — Il est inutile de reproduire cet énoncé sur les copies.