GIACOMO CANDIDO

Formules pour l’étude d’une figure remarquable

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 31-38

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__31_1>

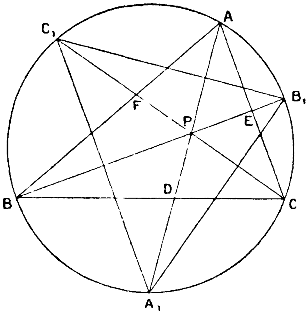
[K1c]

FORMULES POUR L'ÉTUDE D'UNE FIGURE REMARQUABLE;

PAR M. GIACOMO CANDIDO, à Pise.

Le but de cet article est d'indiquer quelques formules qui peuvent servir pour l'étude d'une figure remarquable. On trouvera même quelques applications.

M. le Professeur F. Ferrari (*Periodico di Matematica,* vol. VIII, p. 67) en généralisant quelques formules de M. le Professeur Thiry résout le problème suivant : *Calculer les distances des points du plan aux sommets d'un triangle et les distances mutuelles de ces points, connaissant les rapports que déterminent sur les côtés du triangle les droites joignant ces points aux sommets.* Soit ABC le triangle, P le point intérieur ou



extérieur au triangle et AD, BE, CF les droites qui le projettent par A, B, C sur BC, AC, AB. Faisons

$$\frac{AF}{FB} = m, \qquad \frac{BD}{DC} = p, \qquad \frac{CF}{FA} = q \qquad (mpq = 1),$$

et en prenant m, p, q positifs ou négatifs selon que D, E, F tombent sur les côtés ou sur leur prolongement, on a

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} \overline{CP}^2 = [(1+m)(a^2m+b^2) - mc^2] : (mp+p+1)^2, \\ \overline{AP}^2 = [(1+p)\ \ (pb^2+c^2) - pa^2] : (pq+p+1)^2, \\ \overline{BP}^2 = [(1+q)\ \ (qc^2+a^2) - qb^2] : (mq+q+1)^2. \end{cases}$$

Supposons maintenant que AD, BE, CF coupent le cercle circonscrit au triangle en A_1, B_1, C_1 respectivement, on a ainsi un autre triangle $A_1 B_1 C_1$. Alors on a

$$\frac{\mathrm{AF}+\mathrm{FB}}{\mathrm{FB}} = m+1, \qquad \frac{\mathrm{AF}+\mathrm{FB}}{\mathrm{AF}} = \frac{1+m}{m},$$

d'où

$$\frac{c^2}{\overline{\mathrm{AF}}.\overline{\mathrm{FB}}} = \frac{(m+1)^2}{m},$$

ou

$$\overline{\mathrm{AF}}.\overline{\mathrm{FB}} = \frac{mc^2}{(m+1)^2};$$

d'ailleurs

$$\overline{\mathrm{C_1 F}}.\overline{\mathrm{FC}} = \frac{mc^2}{(m+1)^2},$$

d'où

$$\mathrm{FC_1} = \frac{mc^2}{\mathrm{FC}.(m+1)^2}.$$

Maintenant des formules (I) on tire

$$\text{(II)} \qquad \overline{\mathrm{FC}}^2 = \frac{(m+1)(ma^2+b^2)-mc^2}{(1+m)^2}, \qquad \ldots,$$

d'où

$$\mathrm{FC_1} = \frac{mc^2}{(1+m)\sqrt{(1+m)(a^2 m+b^2)-mc^2}},$$

donc

$$\mathrm{CC_1} = \frac{(m+1)(ma^2+b^2)}{(1+m)\sqrt{(1+m)(a^2 m+b^2)-mc^2}},$$

ou

$$\text{(III)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{CC_1} &= \frac{a^2 m+b^2}{\sqrt{(1+m)(a^2 m+b^2)-mc^2}}, \\ \mathrm{AA_1} &= \frac{c^2 p+b^2}{\sqrt{(1+p)(pc^2+b^2)-pa^2}}, \\ \mathrm{BB_1} &= \frac{a^2 q+c^2}{\sqrt{(1+q)(a^2 q+c^2)-b^2 q}}. \end{aligned} \right.$$

Par les triangles semblables ABD, $\mathrm{CDA_1}$, $\mathrm{BDA_1}$, ABC, ..., on tire les autres formules :

$$
(\mathrm{IV})\quad \left\{
\begin{aligned}
A_1C &= \frac{ac}{\sqrt{(1+p)(c^2p+b^2)-pa^2}},\\
A_1B &= \frac{apb}{\sqrt{(1+p)(c^2p+b^2)-pa^2}},\\
B_1A &= \frac{ab}{\sqrt{(1+q)(a^2q+c^2)-b^2q}},\\
B_1C &= \frac{bcq}{\sqrt{(1+q)(a^2q+c^2)-b^2q}},\\
C_1B &= \frac{cb}{\sqrt{(1+m)(ma^2+b^2)-mc^2}},\\
C_1A &= \frac{acm}{\sqrt{(1+m)(ma^2+b^2)-mc^2}},
\end{aligned}
\right.
$$

et à ces formules nous pouvons en joindre d'autres relatives aux angles que les droites AD, BE, CF font avec les côtés du triangle ABC.

Posons

$$\widehat{BAA_1} = \theta, \qquad \widehat{C_1CA} = \xi, \qquad \widehat{B_1BC} = \varphi,$$

alors on a facilement

$$p = \frac{c\sin\theta}{b\sin(A-\theta)}, \qquad m = \frac{b\sin\xi}{a\sin(C-\xi)},$$

$$q = \frac{a\sin\varphi}{c\sin(B-\varphi)},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{bp\sin A}{c+bp\cos A}, \qquad \operatorname{tang}\xi = \frac{am\sin\xi}{b+am\cos\xi},$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{cq\sin\varphi}{a+cq\cos\varphi},$$

et de ces formules on tire les suivantes :

$$\sin\theta = \frac{bp\sin A}{\sqrt{b^2p^2+c^2+2bcp\cos A}},$$

$$\cos\theta = \frac{c+bp\cos A}{\sqrt{b^2p^2+c^2+2bcp\cos A}},$$

$$\sin(A-\theta)=\frac{c\sin A}{\sqrt{b^2p^2+c^2+2bcp\cos A}},$$

$$\cos(A-\theta)=\frac{bp+c\cos A}{\sqrt{b^2p^2+c^2+2bcp\cos A}},$$

$$\sin\varphi=\frac{cq\sin B}{\sqrt{c^2q^2+a^2+2acq\cos B}},$$

$$\cos\varphi=\frac{a+cq\cos B}{\sqrt{c^2q^2+a^2+2acq\cos B}},$$

$$\sin(B-\varphi)=\frac{a\sin B}{\sqrt{c^2q^2+a^2+2acq\cos B}},$$

$$\cos(B-\varphi)=\frac{cq+a\cos B}{\sqrt{c^2q^2+a^2+2acq\cos B}},$$

$$\sin\xi=\frac{am\sin C}{\sqrt{a^2m^2+b^2+2abm\cos C}},$$

$$\cos\xi=\frac{b+am\cos C}{\sqrt{a^2m^2+b^2+2abm\cos C}},$$

$$\sin(C-\xi)=\frac{b\sin C}{\sqrt{a^2m^2+b^2+2abm\cos C}},$$

$$\cos(C-\xi)=\frac{am+b\cos C}{\sqrt{a^2m^2+b^2+2abm\cos C}}.$$

Première application. — *Surface du triangle* $A_1B_1C_1$: Les angles du triangle $A_1B_1C_1$ sont respectivement

$$A_1=B-\varphi+\xi,\qquad B_1=C-\xi+\theta,\qquad C_1=A-\theta+\varphi;$$

il en résulte

$$\begin{aligned}\sin A &= \sin(B-\varphi)\cos\xi+\sin\xi\cos(B-\varphi)\\ &=\frac{a\sin B(b+am\cos C)+am\cos C(cq+a\cos B)}{\sqrt{(a^2m^2+b^2+2abm\cos C)(c^2q^2+a^2+2acq\cos B)}},\end{aligned}$$

et en répétant la même chose pour $\sin B_1$ et $\sin C_1$, on a

$$\sin A_1 = \frac{a(am\sin A + b\sin B + cmq\sin C)}{\sqrt{(a^2m^2 + b^2 + 2abm\cos C)(c^2q^2 + a^2 + 2acq\cos B)}},$$

$$\sin B_1 = \frac{b(amp\sin A + bp\sin B + c\sin C)}{\sqrt{(a^2m^2 + b^2 + 2abm\cos C)(b^2p^2 + c^2 + 2bcp\cos A)}},$$

$$\sin C_1 = \frac{c(a\sin A + bpq\sin B + cq\sin C)}{\sqrt{(c^2q^2 + a^2 + 2acq\cos B)(b^2p^2 + c^2 + 2bcp\cos A)}}.$$

De ces formules, comme on voit facilement, on tire la formule qui donne la surface du triangle $A_1B_1C_1$, et en appelant S_1 la surface de ce triangle, et S celle du triangle ABC, on a

$$S_1 = \frac{(ma^2 + mqc^2 + b^2)(mpa^2 + b^2p + c^2)(a^2 + pqb^2 + qc^2)S}{(a^2m^2 + b^2 + 2abm\cos C)(c^2q^2 + a^2 + 2acq\cos B)(b^2p^2 + c^2 + 2bcp\cos A)}.$$

Pour la surface de l'hexagone $AC_1BA_1CB_1$ on a la formule

$$E = 8R^2S\left[\frac{p + (b^2p^2 + c^2)\operatorname{cotg}A}{b^2p^2 + c^2 + 2bcp\cos A} + \frac{q + (c^2q^2 + a^2)\operatorname{cotg}B}{c^2q^2 + a^2 + 2acq\cos B} + \frac{m + (a^2m^2 + b^2)\operatorname{cotg}C}{a^2m^2 + b^2 + 2abm\cos C}\right].$$

Si le point P *est le centre de gravité du triangle* ABC *on a la formule*

$$S_1 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^3 S}{(a^2 + 4bc\cos A)(b^2 + 4ac\cos B)(c^2 + 4ab\cos C)};$$

si ce point est le point de Lemoine du triangle ABC, *on a*

$$S_1 = \frac{9a^2b^2c^2S}{(a^2 + 4bc\cos A)(b^2 + 4ac\cos B)(c^2 + 4ab\cos C)}.$$

Deuxième application. — *Le quadrilatère harmonique :* Supposons que le point P soit le point de Lemoine du triangle, alors on a

$$m = \frac{b^2}{a^2}, \qquad p = \frac{c^2}{b^2}, \qquad q = \frac{a^2}{c^2}.$$

Par les formules (IV) on a

$$\overline{A_1C}.\overline{AB} = \overline{A_1B}.CA,$$
$$\overline{C_1B}.\overline{CA} = \overline{AC_1}.\overline{BC},$$
$$\overline{B_1A}.\overline{BC} = \overline{B_1C}.\overline{AB},$$

d'où nous concluons : *Les quadrilatères* AC_1BC, ABA_1C, $ABCB_1$ *sont harmoniques.*

Considérons en particulier le quadrilatère ABA_1C; on obtient par nos formules

$$\frac{\overline{A_1B}^2}{\overline{A_1C}^2} = \frac{c^2}{b^2}, \qquad \frac{\overline{AC}^2}{\overline{A_1C}^2} = \frac{AD}{DA_1} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BA_1}^2},$$

d'où nous concluons que : *Le point de concours* D *des diagonales est le point de Lemoine du quadrilatère.*

La même considération pour les points E *et* F *relativement aux quadrilatères.*

Corollaire. — *Les tangentes menées par les extrémités d'une diagonale, dans un quadrilatère harmonique, se coupent sur l'autre diagonale.*

Considérons le quadrilatère $B_1C_1A_1C$; par nos formules on a

$$\overline{B_1C_1}.\overline{A_1C_1} = \overline{CB_1}.\overline{A_1C_1},$$

donc : *Le quadrilatère* $B_1C_1A_1C$ *est harmonique.*

Il en est de même des quadrilatères $C_1A_1B_1A$, $A_1B_1C_1B$.

Corollaire. — *Les deux triangles* ABC, $A_1B_1C_1$ *sont cosymédians.*

QUESTIONS. — On voit facilement comment par le moyen des formules indiquées on peut aborder l'étude d'une foule de problèmes relatifs aux différentes relations métriques entre les éléments de la figure que nous avons étudiée, et comment la combinaison même de ces formules peut donner quelques propriétés spéciales de figures particulières (en prenant pour m, p, q des valeurs particulières).

Par exemple étudier quand on a

$$\frac{A_1C}{AB} = \frac{B_1A}{BC} = \frac{C_1B}{CA},$$

$$A_1A = AB + A_1C, \ \ldots,$$

$$\overline{AA_1}^2 = \overline{A_1D}\,.\,\overline{A_1C},$$

$$\frac{AP}{AD} = \frac{BP}{BE} = \frac{CP}{CF} = k,$$

$$A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1,$$

$$PD = PE = PF = \ldots (^1).$$

Si le point P *est le centre de gravité du triangle* ABC, *on a*

$$\left(\frac{b^2+c^2}{AA_1}\right)^2 + \left(\frac{a^2+c^2}{BB_1}\right)^2 + \left(\frac{a^2+b^2}{CC_1}\right)^2 = 3(a^2+b^2+c^2).$$