NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. RIPERT

Sur l'homographie et la dualité appliquées aux propriétés métriques de l'espace

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 306-329

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__306_0>

[P2]

SUR L'HOMOGRAPHIE ET LA DUALITÉ APPLIQUÉES AUX PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DE L'ESPACE [1];

PAR M. L. RIPERT.

I. — GÉOMÉTRIE AUTOUR DU POINT.

Préliminaires.

1. Les procédés de passage de la Géométrie plane (dans un plan S) à la Géométrie autour d'un point S ayant été indiqués, pour les propriétés *projectives*, dans un précédent article (*Nouvelles Annales*, 1898; p. 446), il suffira de donner ci-après un nombre de définitions suffisant pour montrer que leur application aux propriétés *métriques* n'offre aucune difficulté.

Pour faciliter la comparaison, j'emploierai les mêmes numéros d'ordre que dans l'article relatif aux propriétés métriques planes (1898, p. 446); je conserverai, en outre, les mêmes notations. Il doit être entendu, sans qu'il soit besoin d'en faire mention dans les énoncés, que, de même que, dans la géométrie du plan S, tous les éléments sont dans S, dans la géométrie autour du point S, tous les éléments considérés passent par S. En Géométrie plane dans S, il n'y a que des points et des droites, le seul plan déterminé étant S; de même, dans la géométrie autour de S, il n'y a que des plans et des droites, le seul point déterminé étant S.

[1] Voir *Nouvelles Annales*, p. 101; 1899.

2. Les bases, indépendamment du théorème de Chasles, sur l'invariance du rapport anharmonique, sont : 1° une droite n, intersection de deux plans fixes N_1 et N_2, arbitrairement choisis (r ou i) et déterminant toute une famille de cônes (du 2e degré) *homotangents* (c'est-à-dire astreints à toucher N_1, N_2) ; 2° et corrélativement, un plan N, jonction de deux droites fixes n_1 et n_2, arbitrairement choisies (r ou i) et qui déterminent toute une famille de cônes *homolinéaires* (c'est-à-dire astreints à avoir pour génératrices n_1 et n_2) (¹).

Un cône *homotangent* est déterminé par la donnée du plan polaire de n et d'un plan tangent, ou encore de trois plans tangents. Un cône *homolinéaire* est déterminé par la donnée de la polaire du plan N et d'une génératrice, ou encore de trois génératrices.

Dièdre anharmonique de deux plans.

3, 4. Étant donnée une droite d, par laquelle on mène deux plans A et B et que l'on joint à n par un plan N_d, on considère, dans la famille de cônes homotangents (N_1, N_2), un cône Γ qui sera dit *cône-unité*, ayant pour plan polaire de n un plan arbitraire Q ; soit E un plant tangent à Γ mené par la droite QN_d. On joint les droites QA et n par un plan J, qui coupe E suivant la droite JE, que l'on joint à d par le plan D. Le rapport anharmonique ($ABDN_d$) sera dit le *dièdre anharmonique* des deux plans A et B (les mots : par rapport à n et au cône-unité Γ étant sous-entendus).

5. Si la *fig.* 2 *bis* qui résulterait de cette construction est la corrélative de la *fig.* 2 (5), tous rapports

(¹) Le mot *homoponctuel* serait impropre, puisque la géométrie autour de S ne comporte pas de points.

anharmoniques corrélatifs étant égaux, *toute relation entre des longueurs anharmoniques, exprimant une propriété de la fig.* 2, *subsistera entre les dièdres anharmoniques corrélatifs de* **2** *bis et exprimera une propriété corrélative de cette dernière figure.*

6. *Applications.* — 1° Un cône *homotangent*, ayant O pour polaire de n est l'enveloppe des plans M tels que le drièdre anharmonique (O, M) soit constant; la valeur constante de ce dièdre sera dite le *dièdre anharmonique* du cône homotangent.

2° Un cône *non-homotangent* C est l'enveloppe des plans M tels que la somme ou différence de leurs dièdres anharmoniques avec deux plans fixes F et F′, qui seront dits *plans focaux* du cône (par rapport à n), soit égale à la valeur anharmonique $2a$ du *dièdre focal* (S, S′), déterminé par F, F′, c'est-à-dire du dièdre formé par les plans tangents à C menés par FF′.

Le plan polaire O de n est le conjugué harmonique du plan K de jonction de n et FF′, soit par rapport au couple (F, F′), soit par rapport au couple (S, S′). En désignant par R et R′ les plans tangents menés à C par la droite d'intersection de O et du plan L passant par n qui est conjugué de K par rapport au cône-unité Γ, les dièdres anharmoniques (O, S) et (O, S′) ou a, (O, R) et (O, R′) ou b, (O, F) et (O, F′) ou c, sont respectivement égaux, avec la relation $a^2 \mp b^2 = c^2$. Les polaires de F et F′ par rapport à C sont les *directrices* (par rapport à n) correspondant aux plans focaux, etc.

Angle anharmonique de deux droites (par rapport à N*).*

7. Étant donné un plan D, jonction de deux droites a et b, et qui coupe le plan fondamental N sui-

vant une droite n_D, on considère, dans la famille de cônes homolinéaires (n_1, n_2), un cône γ, qui sera dit *cône-unité*, ayant pour polaire de N une droite arbitraire q; soit e une génératrice de γ située dans le plan qn_D. On mène le plan qa, coupant le plan N suivant une droite j qui, jointe à e, donne le plan je, coupant D suivant une droite d. Le rapport anharmonique $(abdn_D)$ sera dit l'*angle anharmonique* des deux droites a et b (les mots : par rapport à N et au cône-unité γ étant sous-entendus).

8. Si la *fig.* 3 *bis* qui résulterait de cette construction est la corrélative de la *fig.* 3 (7), *toute relation entre des angles anharmoniques (du plan* S), *exprimant une propriété de la fig.* 3, *subsistera entre les angles anharmoniques corrélatifs (autour du point* S) *de la fig.* 3 *bis, et exprimera une propriété corrélative de cette dernière figure.*

9. *Applications.* — 1° Un cône homolinéaire ayant o pour polaire de N est le lieu des droites m telles que l'angle anharmonique (o, m) soit constant. Cette valeur constante sera dite l'*angle anharmonique* du cône homolinéaire.

2° Un cône *non homolinéaire* c est le lieu des droites m telles que la somme ou différence de leurs angles anharmoniques avec deux droites fixes f et f', qui seront dites *focales* du cône (par rapport à N) soit égale à la valeur anharmonique $2A$ de l'*angle focal* (s, s'), formé par les deux génératrices d'intersection de c avec le plan de jonction de f et f', etc.

Laissons au lecteur le soin de *traduire* les numéros suivants :

10, 11, 12. Angle anharmonique (par rapport à n) d'un plan et d'une droite.

13, 14. Angle anharmonique (par rapport à N) d'une droite et d'un plan.

15 à 18. Division anharmonique des dièdres (de plans) et des angles (de droites). Plan central anharmonique d'un dièdre (par rapport à n); son axe anharmonique (par rapport à N).

19, 20, 21. Plans conjugués anharmoniques (par rapport à n) et droites conjuguées anharmoniques (par rapport à N).

22, 23, 24. Éléments anharmoniques des dièdres et des angles de droites.

25 à 28. Bissectrices anharmoniques (par rapport à n) et plans bissecteurs anharmoniques (par rapport à N). Cônes homotangents circonscrit et ex-circonscrit; cônes homolinéaires inscrit et ex-inscrits, etc.

Produits et sommes anharmoniques.

29. J'appellerai *produit anharmonique* S (*par rapport à n*) d'un trièdre, le produit du dièdre anharmonique d'une arête (c'est-à-dire des deux faces qui la déterminent) par la moitié du dièdre anharmonique (11 *bis*) de cette arête avec la face opposée.

Corrélativement, j'appellerai *produit anharmonique* S (*par rapport à* N) d'un trièdre le produit de l'angle anharmonique d'une face (c'est-à-dire des deux arêtes qui la déterminent) par la moitié de l'angle anharmonique (13 *bis*) de cette face avec l'arête opposée.

30. a, b, c étant les dièdres anharmoniques des arêtes et A, B, C les angles anharmoniques des faces, on peut donner à $2p = a + b + c$ et $2P = A + B + C$ les noms de *sommes anharmoniques* du trièdre (par rapport à n ou N).

31, 32. Il est alors facile d'interpréter, pour le trièdre, des formules telles que

$$\begin{aligned} 2S = bc \sin A &= 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \frac{abc}{2R} = 2pr, \\ 2s = BC \operatorname{qusin} a &= 2\sqrt{P(P-A)(P-B)(P-C)} \\ &= \frac{ABC}{2r'} = 2PR', \qquad \dots \end{aligned}$$

Enfin il n'est pas difficile de trouver, pour un trièdre, une interprétation *quasimétrique* des dièdres et des angles exprimés en degrés et subdivisions de degrés, et d'une manière générale, de résoudre, par corrélation, toute difficulté qui pourra se présenter.

II. — Géométrie de l'espace.

Préliminaires.

33. Le détail des procédés d'application de l'homographie et de la dualité à la Géométrie de l'espace exigerait de longs développements. Je me bornerai ici à indiquer quelques bases.

L'existence symbolique du plan i de l'infini, contenant le cercle imaginaire Γ_i de l'infini, qui détermine la famille des sphères de l'espace, étant admise, les données fondamentales des transformations sont : 1° un *plan fondamental n*, contenant une conique donnée (*r* ou *i*) Γ_n, qui détermine une famille de quadriques *homoponctuelles* (ou astreintes à passer par Γ_n); 2° et corrélativement, un *point fondamental* N, sommet d'un cône donné (*r* ou *i*) γ_N, qui détermine une famille de quadriques *homotangentes* (astreintes à être inscrites à γ_N).

Toutes les quadriques homoponctuelles ou homotangentes étant ainsi assujetties à cinq conditions, quatre conditions restent nécessaires et suffisantes pour en déterminer une. La donnée du pôle de *n* pour les premières, ou du plan polaire de N pour les secondes, équivaut à trois conditions.

Définitions et applications.

34. La définition de la *distance anharmonique* de deux points ou *longueur anharmonique* d'un segment (4) s'étend à l'espace en remplaçant la conique-unité par une quadrique homoponctuelle Σ (*quadrique-unité*). Par application immédiate, une quadrique *homoponctuelle*, ayant O pour pôle de *n* est le lieu des points M tels que la longueur anharmonique OM (*rayon anharmonique*) soit constante [1].

35. Si l'on considère, dans la famille de quadriques homotangentes, une quadrique σ, dite *quadrique-unité*, ayant pour plan polaire du point fondamental N un plan arbitrairement choisi *q*, la définition (7) se modifie ainsi : étant donnée une droite D, intersection de deux plans donnés *a* et *b* et dont la jonction à N donne le plan n_D, soit *e* un plan tangent mené à la quadrique-

[1] *Voir* plus loin, pour les propriétés des quadriques analogues à celles (6, 2° et 9, 2°) des coniques.

unité σ par la droite qn_D. On joint la droite qa au point N par le plan j, qui coupe e suivant la droite je que l'on joint à D par le plan d ([1]). Le rapport anharmonique ($abdn_D$) sera dit le *dièdre anharmonique* des deux plans a et b (en sous-entendant : par rapport à N et σ).

Par application, une quadrique *homotangente* est l'enveloppe des plans m tels que le *dièdre anharmonique* (o, m) soit constant.

36. La définition (34) conduit immédiatement à celles de la *distance anharmonique d'un point* A *à un plan p* et de la *distance anharmonique d'un point* A *à une droite* D, ces distances étant celles du point A au point d'intersection de p ou D avec la droite ou le plan passant par A et conjugué (par rapport à n et Γ_n) de p ou D.

La définition (35) conduit de même à celles de l'*angle anharmonique d'un plan a et d'un point* P et de l'*angle anharmonique d'un plan a et d'une droite d*, car ces angles sont ceux du plan a avec les plans de jonction de P ou d avec la droite ou le point situés dans a et conjugués (par rapport à N, γ_N) de P ou d.

Par application, une quadrique *homoponctuelle* est l'enveloppe des plans dont la distance anharmonique à un point fixe (pôle du plan n) est constante. Une quadrique *homotangente* est le lieu des points dont l'angle anharmonique avec un plan fixe (polaire du point N) est constant.

37. La (plus courte) *distance* de deux droites D et D'

([1]) De même que, dans la définition (34), les droites JE et d sont dans le plan (ABN_d), de même, dans la définition (35), les droites je et D passent par le point (abn_D).

est celle de leurs points d'intersection avec les plans menés par chacune d'elles perpendiculairement au plan de leurs directions communes (plan passant par leurs pieds sur le plan de l'infini).

La *distance anharmonique de deux droites* D *et* D′ est donc celle de leurs points d'intersection avec les plans menés par chacune d'elles et conjugués (par rapport à n, Γ_n) d'un plan passant par la droite de jonction de leurs points de rencontre avec n.

Corrélativement, l'*angle anharmonique de deux droites* d *et* d' est celui de leurs plans de jonction avec les points pris sur chacune d'elles et conjugués (par rapport à N, γ_N) d'un point pris sur la droite d'intersection de leurs plans de jonction avec N.

Par application, le lieu des points dont les distances anharmoniques à deux droites D et D′ sont égales est une quadrique réglée Q_1, tangente à n. L'enveloppe des plans, dont les angles anharmoniques avec deux droites d, d' sont égaux, est une quadrique réglée Q_2 passant par N.

38. Les définitions et applications qui précèdent correspondent à celles du précédent article (n^{os} 1 à 18). Il serait facile de faire correspondre de même des définitions et applications (souvent dédoublées) à celles indiquées sous les n^{os} 19 à 31.

Laissant au lecteur le soin de poursuivre cette étude, dont les principes et le mécanisme sont suffisamment indiqués, il me semble préférable d'examiner l'application des notions qui précèdent à une question importante : celle des foyers des coniques et des quadriques et de leurs éléments corrélatifs (droites focales et plans focaux).

Pour les coniques, la question a déjà été examinée sommairement et à un point de vue spécial (nos **6**, **9** et **12**). Mais il importe de rechercher si elle pourrait être traitée par généralisation et dualisation des définitions usuelles d'Euler et de Plücker.

En ce qui concerne les quadriques, je me propose non seulement d'examiner la question des foyers de plans principaux, dont les lieux sont les focales, mais d'indiquer une solution d'une question posée par Chasles en ces termes : « Il est une propriété principale des coniques, qui se retrouve dans les cônes et dont nous n'avons pas encore fait mention relativement aux surfaces du second degré. C'est que : *la somme ou la différence des rayons vecteurs menés d'un point d'une conique aux deux foyers est constante.* Nous avons fait, pendant longtemps, des tentatives pour trouver quelque chose d'analogue dans les surfaces, mais sans obtenir aucun succès. Aussi désirons-nous vivement que cette matière offre assez d'intérêt pour provoquer d'autres recherches.... » (Chasles, *Aperçu historique*, Note XXXI, p. 391, 1889, Gauthier-Villars).

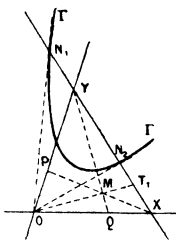
Pour pouvoir étudier ces questions, il est indispensable d'examiner d'abord comment l'on peut modifier les systèmes de coordonnées, de manière à les faire correspondre aux généralisations et dualisations géométriques ci-dessus indiquées. Je me bornerai au système cartésien, le seul en cause pour les questions posées; mais il sera facile de voir que des généralisations analogues s'étendent aux systèmes trilatères et tétraédriques.

Systèmes de coordonnées.

39. Dans le système cartésien plan, un point M est défini, par rapport aux axes coordonnés OX et OY par les longueurs MP et MQ des segments parallèles à OX et OY. En d'autres termes, on joint le point M aux points X et Y communs à la droite *i* et à OX, OY et l'on prend, sur les droites ainsi obtenues, les longueurs métriques (ou par rapport à I_1, I_2) PM et QM des segments compris entre M et OY ou OX.

Plus généralement, on peut considérer (*fig.* 1) le système où sont donnés : 1° deux *axes coordonnés* OX et OY, déterminant le *point-origine* O; 2° une *droite fondamentale* n, déterminée par deux points (*r* ou *i*)

Fig. 1.



N_1 et N_2 et coupant OX et OY en X et Y. Par rapport à une *conique-unité* Γ, ayant O pour pôle de n et passant par N_1, N_2, on appellera *coordonnées absolues* d'un point M les longueurs anharmoniques

$$\mathrm{PM} = \mathrm{OQ} = x, \qquad \mathrm{QM} = \mathrm{OP} = y,$$

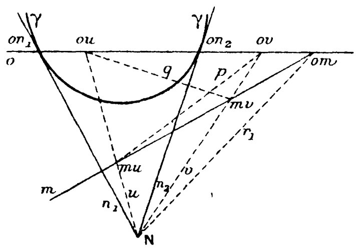
P et Q étant les points d'intersection de MX et MY avec OY et OX. La *coordonnée d'homogénéité* de M est $T_1M = t$ et l'équation de la droite fondamentale n est $T = 0$.

Si les coordonnées sont *quasi-rectangulaires*, c'est-à-dire si X et Y sont conjugués harmoniques par rapport à (N_1, N_2), les équations données du couple (N_1, N_2) étant $\left(\frac{X^2}{L} + \frac{Y^2}{M} = 0,\ T = 0\right)$, l'équation

$\frac{X^2}{L} + \frac{Y^2}{M} = \lambda$ est l'équation générale des coniques homoponctuelles. L'équation $\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} = 1$ représente une conique C, ayant O pour pôle de n et admettant OX et OY pour cordes conjuguées à la fois par rapport à Γ et à C (ou *quasi-axes*).

40. Corrélativement (*fig.* 2), on donne : 1° deux *pôles coordonnés ou* et *ov*, déterminant la *droite-origine* o ; 2° un *point fondamental* N, déterminé par

Fig. 2.



deux droites (r ou i) n_1 et n_2, et dont les jonctions à *ou* et *ov* sont u et v. Par rapport à une *conique-unité* γ, ayant o pour polaire de N et touchant n_1, n_2, on appellera *coordonnées absolues* d'une droite m les angles anharmoniques

$$(p, m) = (o, q) = \mathrm{U}, \qquad (q, m) = (o, p) = \mathrm{V},$$

p et q étant les jonctions de *mu* et *mv* avec *ov* et *ou*. L'équation du point fondamental N est $r = 0$ et

$$(r_1, m) = \mathrm{R}$$

est la *coordonnée d'homogénéité* de m.

Si les coordonnées sont *corrélatives des quasi-rectangulaires*, c'est-à-dire si u et v sont conjuguées harmoniques par rapport à (n_1, n_2), les équations données du couple (n_1, n_2) étant $\left(\frac{u^2}{l} + \frac{v^2}{m} = 0,\ r = 0\right)$, l'équation $\frac{u^2}{l} + \frac{v^2}{m} = \lambda$ est l'équation générale des coniques homotangentes. L'équation $\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} = 1$ représente une conique c, ayant o pour polaire de N et admettant ou et ov pour points conjugués à la fois par rapport à γ et à c (*quasiaxiaux*).

41. Les mêmes principes s'appliquent aux coordonnées de l'espace.

Le système *ponctuel* comporte trois *plans coordonnés* résultant de trois *axes coordonnés* OX, OY, OZ, concourant à l'*origine* O, X, Y, Z étant les intersections de ces axes avec un *plan fondamental* donné n, support d'une conique donnée Γ_n, par laquelle on fait passer la quadrique-unité Σ, ayant O pour pôle de n. Les *coordonnées absolues* d'un point M sont les distances anharmoniques de M aux trois plans coordonnés, comptées à partir de ces plans sur les droites MX, MY, MZ. A tout point M correspond une *coordonnée d'homogénéité* $T_1 M = t$, comptée sur la droite OM, à partir du plan n, dont l'équation est $T = 0$. Si les coordonnées sont *quasirectangulaires*, c'est-à-dire si le triangle XYZ est autopolaire par rapport à Γ_n, les équations données de Γ_n étant

$$\left(\frac{X^2}{L} + \frac{Y^2}{M} + \frac{Z^2}{N} = 0, \qquad T = 0\right),$$

$\frac{X^2}{L} + \frac{Y^2}{M} + \frac{Z^2}{N} = \lambda$ est l'équation générale des quadriques homoponctuelles. L'équation $\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = 1$ représente une quadrique Q ayant O pour pôle de n et admettant les trois axes coordonnés pour *quasi-axes,* c'est-à-dire pour cordes conjuguées à la fois par rapport à Q et à Σ.

La définition du système *tangentiel* corrélatif, par rapport à trois *pôles coordonnés ou*, *ov*, *ow* d'un *plan-origine o* et à un *point fondamental* N, sommet d'un cône donné γ_N, résulte immédiatement de la précédente; il me paraît superflu de la détailler davantage.

Foyers dans les coniques.

42. On appelle *foyer* (métrique) d'une conique, soit : 1° tout point F tel que sa distance à un point quelconque M de la courbe soit une fonction rationnelle et linéaire des coordonnées de M; soit, 2° tout centre F d'un cercle de rayon nul bitangent à la conique, ou, ce qui revient au même, tout point F par lequel on peut mener à la conique deux tangentes isotropes.

La définition (1°) est due à Euler et la définition (2°) à Plücker. En appliquant l'une ou l'autre à la conique $\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} = 1$, les coordonnées étant rectangulaires, on trouve les quatre solutions (dont deux toujours réelles et deux toujours imaginaires) :

$$(1)\quad y = 0,\quad x = \pm\sqrt{A - B};\qquad x = 0,\quad y = \pm\sqrt{B - A}.$$

43. Quelques observations sont ici nécessaires.

1° Dans la définition d'Euler, qui se symbolise par l'expression $\delta = p$, δ est une distance, comptée sur une droite de direction indéterminée (rayonnant autour de F) et que l'on considère ordinairement comme toujours positive; p est une fonction linéaire qui, selon les coordonnées de M, peut être positive ou négative. Il serait donc plus exact d'écrire $\delta = \pm p$, ou mieux $\delta^2 = p^2$, et par suite de dire : « On appelle *foyer* d'une conique tout point F tel que *le carré* de sa distance au point quelconque M de la courbe soit égal *au carré* d'une fonction rationnelle et linéaire des coordonnées de M ». Cette rectification de détail peut paraître subtile au premier abord ; il n'en sera plus de même si elle conduit, pour les quadriques, à des conséquences utiles.

2° La définition de Plücker est belle et juste, et en outre féconde, car, après avoir donné les foyers des coniques, elle permet de rechercher ceux des courbes de classe supérieure. Mais elle est un peu déconcertante et difficile à saisir au premier abord ([1]). Dans tous les cas, il est impossible de la traduire par une figure.

3° La question des foyers est du quatrième degré, ce que montrent les quatre solutions (1), ce qui résulte aussi de l'équation du problème $[c^4 - (A - B)^2 = 0]$, où c désigne la distance d'un foyer au centre. Cette équation a toujours deux racines réelles et deux racines imaginaires.

Or, il est de principe que toute question *générale* doit conduire à une équation *générale*. Le caractère d'une équation *générale* du quatrième degré est de présenter, selon les données, soit quatre solutions réelles, soit deux solutions réelles et deux imaginaires, soit quatre solutions imaginaires.

([1]) «... Quand on parle d'une droite (isotrope) qui, en chacun de ses points, est perpendiculaire à elle-même; d'un foyer qui n'est autre qu'un cercle de rayon nul, doublement tangent à une conique, toutes ces formes de langage sont faites pour surprendre celui qui en ignorerait l'origine purement algébrique; et elles ne prennent une valeur géométrique que par extension, et aussi parce qu'elles peuvent conduire à d'utiles résultats... » (C.-A. Laisant, *La Mathématique*, p. 122).

Pourquoi, dans la question des foyers, trouve-t-on toujours deux solutions réelles et deux imaginaires, jamais quatre solutions réelles ni quatre solutions imaginaires? C'est parce que *la question n'est pas générale;* c'est la question spécialisée par rapport à (i, I_1, I_2); elle doit être susceptible d'une généralisation par rapport à (n, N_1, N_2), qui fournira les trois systèmes de solutions et amènera une dualisation par rapport à (N, n_1, n_2).

44. Ceci posé, par rapport à (n, N_1, N_2), j'appelle *foyer anharmonique* d'une conique C soit : 1° tout point F tel que le carré de sa distance anharmonique à un point quelconque M de C soit une fonction rationnelle et linéaire des coordonnées de M; soit, 2° tout pôle F de n par rapport à une conique homoponctuelle de dimensions nulles (c'est-à-dire passant par F) et bitangente à C.

1° Les équations des points N_1, N_2, dans le système ponctuel quasi rectangulaire (39) étant

$$\left(\frac{X^2}{L} + \frac{Y^2}{M} = 0, \qquad T = 0\right),$$

et l'équation de la conique C étant $\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} = 1$, le problème consiste à identifier cette équation de C avec la suivante qui résulte de l'une quelconque de ces définitions, α, β étant les coordonnées d'un point F,

$$M(X-\alpha)^2 + L(Y-\beta)^2 - (\lambda X + \mu Y + \nu)^2 = 0.$$

On trouve les quatre solutions :

$$\beta_1 = 0, \qquad \alpha_1 = \pm\sqrt{\frac{AM - BL}{M}};$$

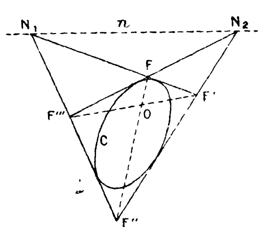
$$\alpha_2 = 0, \qquad \beta_2 = \pm\sqrt{\frac{BL - AM}{L}}.$$

En supposant $L > 0$, les quatre solutions sont réelles pour $BL - AM > 0$, $M < 0$; deux sont réelles et deux imaginaires pour $BL - AM > 0$ et $M > 0$, ou $BL - AM < 0$, $M > 0$; enfin, les quatre solutions sont imaginaires pour $BL - AM < 0$, $M < 0$.

2° Les deux droites isotropes de F étant les droites FI_1 et FI_2, tangentes à C, la définition de Plücker (deuxième forme) est un cas particulier de la suivante : « On appelle *foyers* d'une conique C par rapport à un couple de points (r ou i) N_1, N_2, les quatre sommets (r ou i) du quadrilatère circonscrit formé par les quatre tangentes menées de N_1 et N_2 à C. »

Il suffit de regarder la *fig.* 3 pour reconnaître que, par rapport à un couple de points, une conique peut

Fig. 3.



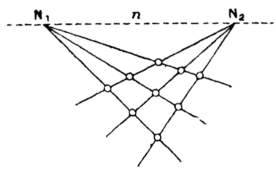
avoir quatre foyers réels, de même qu'elle peut avoir quatre foyers imaginaires (dans le cas, par exemple, où les deux points N_1 et N_2 seraient intérieurs à C).

On aperçoit aussi immédiatement des propriétés (difficiles à constater pour les foyers métriques), par exemple celles qui résultent du quadrilatère *complet* $(N_1 N_2 F F' F'' F''')$.

45. *Remarque.* — La généralisation de la définition de Plücker s'applique avantageusement aux courbes de toutes classes. En appelant *foyer d'une courbe de*

classe M, par rapport à un couple (N_1, N_2), tout point de rencontre d'une tangente issue de N_1 avec une tangente issue de N_2, on voit (*fig.* 4) que toute courbe

Fig. 4.



de classe M a M^2 foyers (*r* ou *i*), situés M à M (et de deux manières) en ligne droite.

46. *Corrélativement,* on appellera *focale anharmonique* d'une conique *c*, par rapport à un couple de droites (n_1, n_2) toute droite *f* telle que le carré de son angle anharmonique avec une tangente quelconque *m* à *c* soit une fonction rationnelle et linéaire des coordonnées de *m*; ou encore, toute polaire *f* de N par rapport à une conique homotangente, touchant la polaire de N par rapport à *c* et bitangente à *c*. On déduira de ces définitions toutes les conséquences corrélatives. En généralisant, on appellera *focale d'une courbe d'ordre m*, par rapport à un couple de droites (n_1, n_2), toute droite de jonction d'un point de rencontre de la courbe avec n_1 et d'un point de rencontre avec n_2. D'où il résulte immédiatement que, par rapport à tout couple de droites, une courbe du $m^{\text{ième}}$ ordre a m^2 focales concourant *m* à *m* (de deux manières) sur la courbe.

Foyers dans les qudriques.

47. Laissant de côté, pour les surfaces, la définition de Plücker, qui donne les foyers de plans principaux (et

par suite les focales) des quadriques, et à laquelle on pourra appliquer des généralisations et dualisations analogues à celles qui viennent d'être indiquées, reportons-nous à 1837, date de la publication de l'*Aperçu historique;* la définition alors en vigueur pour les foyers des coniques était celle d'Euler.

Chasles, n'apercevant pas sans doute le moyen de transformer cette définition de manière à obtenir les points de ses focales [qu'il n'appelait pas foyers ([1])], a pris un autre point de départ. A une propriété du couple de foyers d'un axe de conique, il a fait correspondre la suivante, qu'il a prise pour définition : « La normale et le plan tangent, menés en un point quelconque d'une quadrique, rencontrent chacun des trois plans principaux en un point et suivant une droite : le point est toujours le pôle de la droite par rapport à une certaine conique (r ou i) située dans le plan principal », et qui est la (conique excentrique ou) *focale* de ce plan principal.

On sait le beau parti que Chasles a su tirer de cette définition ; mais je vais essayer de montrer que, même en 1837, la définition d'Euler, convenablement interprétée, était celle qui conduisait le plus naturellement et le plus logiquement à la définition des focales *comme lieux de foyers,* et qu'elle eût même pu mettre sur la voie de la solution de la question posée par Chasles et ci-dessus énoncée (38).

([1]) En lisant la Note XXXI de l'*Aperçu historique,* on voit aisément que la découverte des *coniques excentriques* ou *focales* des quadriques s'est présentée à Chasles *par ces courbes elles-mêmes,* et que ce n'est que plus tard qu'on les a considérées comme *lieux de foyers.* Nulle part, Chasles ne donne de définition, ni géométrique ni analytique, des foyers, des plans cycliques associés, des directrices correspondantes, des cylindres directeurs. Ces définitions et les propriétés qui en résultent sont postérieures.

48. La définition d'Euler, pour les coniques, se symbolise par $\delta^2 = p^2$. Mais, du plan à l'espace, tout se dédouble. En particulier, un axe d'une conique correspond, d'abord à un plan principal d'une quadrique, puis (mais moins directement) à un axe de quadrique. De même, une formule $\delta^2 = p^2$ se dédouble en $\Delta^2 = PP'$ et $\Delta^2 = P^2$, la première correspondance

$$[\delta^2 = p^2, \Delta^2 = PP']$$

étant *la plus directe*. C'est un fait qui n'est pas nouveau, que l'on a pu observer dans un grand nombre de questions et dont voici un exemple caractéristique.

La parabole correspond, en première ligne, aux deux paraboloïdes; en seconde ligne seulement, au cylindre parabolique. Une conique

$$[\varphi(X, Y) = AX^2 + 2BXY + CY^2] + \ldots = 0$$

est parabole si l'on a $\varphi(X, Y) = p^2$. Une quadrique

$$\begin{aligned}[\Phi(X, Y, Z) = AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 & \\ + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY] + \ldots = 0 &\end{aligned}$$

est paraboloïde si l'on a $\Phi(X, Y, Z) = PP'$; elle est cylindre parabolique (ou variété) si l'on a $\Phi(X, Y, Z) = P^2$. On voit encore que : 1° dans $\varphi(X, Y) = p^2$, $p^2 = 0$ est l'équation (quadratique) de direction de l'axe; dans $\Phi(X, Y, Z) = PP'$, $PP' = 0$ est l'équation (quadratique) de direction des plans principaux, dont l'intersection est l'axe; dans $\Phi(X, Y, Z) = P^2$, $P^2 = 0$ est l'équation de direction du plan principal unique; 2° de même, dans $\delta^2 = p^2$, $p^2 = 0$ est l'équation quadratique de la directrice; dans $\Delta^2 = PP'$, $PP' = 0$ est l'équation quadratique des plans associés dont l'intersection est la directrice; enfin, dans $\Delta^2 = P^2$, $P^2 = 0$ est l'équation du plan directeur unique (quand il peut exister).

49. On peut donc donner les définitions métriques suivantes :

1° On appelle *foyer* (*de plan principal*) d'une quadrique tout point F tel que *le carré* de sa distance à un point M de la surface soit égal *au produit* de deux fonctions rationnelles et linéaires (P et P′) des coordonnées de M. Les équations $P = 0$ et $P' = 0$ sont celles de deux plans dits *associés* à F et dont l'intersection est dite *directrice correspondante* (de F).

En appliquant cette définition à une quadrique non de révolution, on trouve les équations des trois focales, plus simplement et plus rapidement qu'avec la définition de Chasles. Je laisse au lecteur le soin de faire cette vérification et d'examiner les généralisations et dualisations que l'on peut tirer de la définition (1°) (1).

---

(1) Les coordonnées étant *quasi rectangulaires* (41),

$$\left[\frac{X^2}{L} + \frac{Y^2}{M} + \frac{Z^2}{N} = 0, \quad T = 0\right]$$

étant les équations de Γ_n, et $\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = 1$ celle de la quadrique Q, les équations de la focale φ du plan des YZ, des plans *quasi cycliques* (PP′) associés au foyer $(0, \beta, \gamma)$, de la directrice correspondante D et du cylindre directeur C_φ sont respectivement

$$(\varphi) \qquad \frac{Y^2}{BL - AM} + \frac{Z^2}{CL - AN} = \frac{1}{L}, \qquad X = 0.$$

$$(PP') \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{BL - AM}{BM} Y^2 + \frac{CL - AN}{CN} Z^2 \\ &\qquad - 2\frac{L\beta}{M} Y - 2\frac{L\gamma}{N} Z + A + \frac{L\beta^2}{M} + \frac{L\gamma^2}{N} = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(D) \qquad Y = \frac{BL\beta}{BL - AM}, \qquad Z = \frac{CL\gamma}{CL - AN},$$

$$(C_\varphi) \qquad \frac{BL - AM}{B^2 L} Y^2 + \frac{CL - AN}{C^2 L} Z^2 = 1.$$

Ces équations vérifiées, on peut se demander et trouver aisément ce qu'elles représentent si l'on change de nom les coordonnées.

2° On appelle *foyer* (*d'axe*) d'une quadrique tout point F tel que *le carré* de sa distance à un point M de la surface soit égal *au carré* (P^2) d'une fonction rationnelle et linéaire des coordonnées de M.

50. En cherchant d'après cette définition (2°) les foyers qui peuvent se trouver sur l'axe OX de la quadrique $\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = 1$, on trouve, pour condition nécessaire $B = C$. Ainsi une quadrique non de révolution n'a pas de foyers d'axe (ni réels ni imaginaires). Continuant alors le calcul pour la quadrique $\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2 + Z^2}{B} = 1$, on trouve deux solutions $(y = z = 0,\ x = \pm\sqrt{A - B})$. Donc *une quadrique de révolution a, sur son axe, deux foyers* (*réels ou imaginaires*), qui sont ceux de sa section méridienne situés sur cet axe, et ces foyers jouissent de la propriété visée par Chasles comme principale (38).

Or, une quadrique de révolution peut être définie : Une quadrique Q telle que, étant associée à une sphère S, concentrique et bitangente, les sections de Q et de S par des plans conjugués du diamètre de contact (ou axe) soient des cercles, c'est-à-dire des coniques homothétiques (coupant le cercle de l'infini Γ_i aux deux mêmes points fixes).

Cette définition est un cas particulier de la suivante : On appelle *quadrique de révolution homologue* (par rapport à n, Γ_n), une quadrique Q telle que, étant associée à une quadrique homoponctuelle Σ, ayant même pôle O de n et bitangente, les sections de Q et Σ par les mêmes plans conjugués de la corde de contact (*quasi-axe*) soient des coniques homoponctuelles (coupant Γ_n aux deux mêmes points fixes).

Il devient dès lors évident géométriquement que, si l'on appelle *foyer* (*de quasi-axe*) d'une quadrique Q tout point F tel que le carré de sa distance anharmonique à un point quelconque M de la surface soit égal au carré d'une fonction rationnelle et linéaire des coordonnées de M : une quadrique quelconque Q, rendue de révolution homologue par l'association d'une quadrique homoponctuelle Σ convenablement choisie, a, sur son quasi-axe, deux foyers F, F', qui sont ceux de sa section quasi-méridienne. La somme ou la différence des longueurs anharmoniques des rayons vecteurs menés d'un point de Q aux deux foyers F, F' est constante.

Par rapport à tout plan donné n, le problème a une infinité de solutions. Il suffit en effet (ce qui peut se faire d'une infinité de manières) d'assujettir la conique $\Gamma_n\left(\frac{X^2}{L}+\frac{Y^2}{M}+\frac{Z^2}{N}=0,\ T=0\right)$ à la condition $\frac{B}{M}=\frac{C}{N}$, $\frac{X^2}{A}+\frac{Y^2}{B}+\frac{Z^2}{C}=1$ étant l'équation de la quadrique Q. Elle est alors rendue de révolution homologue avec quasi-axe OX, et les coordonnées des deux foyers (r ou i) sont $y=z=0$, $x=\pm\sqrt{\frac{AM-BL}{M}}$.

51. Corrélativement, j'appellerai *quadrique de révolution corrélative* (par rapport à N, γ_N) une quadrique q, telle que, étant associée à une quadrique homotangente σ, ayant même plan polaire o de N et bitangente à q, les cônes circonscrits à q et σ ayant leurs sommets aux mêmes points conjugués de la corde de contact (*quasi-axe corrélatif*) soient des cônes homotangents (touchant γ_N suivant les mêmes plans fixes).

Si l'on appelle *plan focal* (*de quasi-axe*) d'une quadrique q tout plan f tel que le carré de son dièdre anharmonique avec un plan tangent quelconque m à q soit une fonction rationnelle et linéaire des coordonnées de m, une quadrique quelconque q, rendue de révolution corrélative par l'association d'une quadrique homotangente convenable σ, a, pour quasi-axe corrélatif, l'intersection de deux plans focaux (r ou i) f et f'. La somme ou la différence des dièdres anharmoniques formés par un plan tangent à q avec ces deux plans focaux est constante.

Par rapport à tout point donné N, le problème a une infinité de solutions correspondant, pour la quadrique $\left(\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = 1\right)$, à un cône quelconque de la famille $\left(\frac{u^2}{l} + \frac{v^2}{m} + \frac{w^2}{n} = 0,\ r = 0\right)$, avec l'une des conditions $\frac{b}{m} = \frac{c}{n}$, $\frac{c}{n} = \frac{a}{l}$ ou $\frac{a}{l} = \frac{b}{m}$, les plans focaux $\left(\text{dans le cas de } \frac{b}{m} = \frac{c}{n}\right)$ ayant pour coordonnées : $v = w = 0$, $u = \pm\sqrt{\frac{am - bl}{m}}$.

52. Le cadre de cet article ne me permet pas d'insister davantage. Je crois avoir démontré, d'une manière élémentaire, que, toute propriété métrique pouvant être ramenée à la forme projective, les principes d'homographie et de dualité sont d'une généralité absolue. Leur application est féconde, non seulement par les généralisations et dualisations qu'elle donne immédiatement, mais aussi parce qu'elle rend les propriétés plus faciles à saisir, en permettant de substituer des éléments *réels,* nettement visibles, à des éléments que, sans elle, on ne peut considérer que comme *imaginaires* et qui, par cela même, restent souvent obscurs.