E. LACOUR

Sur l'équation d'Euler : $\frac{dx}{\sqrt{\Psi(x)}} = \frac{dx_1}{\sqrt{\Psi(x_1)}}$

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 293-300

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__293_0>

[H2cβ]

SUR L'ÉQUATION D'EULER :

$$\frac{dx}{\sqrt{\Psi(x)}} = \frac{dx_1}{\sqrt{\Psi(x_1)}};$$

Par M. E. LACOUR,
Professeur adjoint à l'Université de Nancy.

1. Expliquons d'abord sur un exemple simple la méthode qui sera employée pour l'équation d'Euler.

Considérons un cercle rapporté à deux diamètres rectangulaires Ox, Oy; un point M de ce cercle est défini par l'angle φ que fait le rayon OM avec Ox, ou encore par la valeur du paramètre $t = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$. Prenons sur le cercle deux points M et M_1, correspondant à des angles φ et φ_1 et à des valeurs t et t_1 du paramètre t, puis écrivons que la droite MM_1 est tangente à un cercle ayant pour centre le point O et pour rayon une longueur arbitraire ρ.

La relation entre t et t_1 ainsi obtenue est évidemment équivalente à la suivante :

$$\varphi_1 - \varphi = \alpha,$$

α étant une constante convenablement choisie; elle doit donc conduire, quand on la différentie, à l'équation différentielle

$$\frac{dt_1}{1+t_1^2} - \frac{dt}{1+t^2} = 0,$$

et, comme l'équation finie entre t et t_1 contient une constante arbitraire, ρ, c'est l'intégrale générale de l'équation différentielle du premier ordre considérée.

La vérification de ces résultats est immédiate. L'équation de la droite MM_1 est :

$$x(1-tt_1)+y(t+t_1)=1+tt_1,$$

si l'on suppose que le rayon du cercle donné a été pris pour unité. La condition pour que cette droite soit tangente à un cercle de centre O et de rayon ρ est

$$\frac{(1-tt_1)^2+(t+t_1)^2}{(1+tt_1)^2}=\frac{1}{\rho^2},$$

ou encore

$$\frac{(t_1-t)^2}{(1+tt_1)^2}=\frac{1-\rho^2}{\rho^2}.$$

Elle peut s'écrire

$$\frac{t_1-t}{1+tt_1}=\text{const.}$$

et elle donne, par différentiation,

$$-(1+t_1^2)\,dt+(1+t^2)\,dt_1=0.$$

On a donc ainsi une méthode géométrique pour intégrer l'équation différentielle

$$\frac{dt}{1+t^2}=\frac{dt_1}{1+t_1^2}.$$

2. Considérons maintenant la conique (S) définie par les équations

$$(\mathrm{S})\qquad X=x^2,\qquad Y=2x.\qquad (Y^2-4X=0),$$

où x désigne un paramètre variable, et écrivons que la droite joignant les points M et M_1 de cette conique est tangente à une conique fixe (Σ)

$$(\Sigma)\quad au^2+a'v^2+a''w^2+2bvw+2b'wu+2b''uv=0.$$

On trouve ainsi une équation doublement quadratique et symétrique entre les paramètres x et x_1 des points M et M_1.

Le premier membre de cette équation, ordonné successivement par rapport à x_1 et par rapport à x, peut s'écrire

$$F(x, x_1) = A x_1^2 + 2 B x_1 + C \equiv A_1 x^2 + 2 B_1 x + C_1 = 0 :$$

A, B, C sont des fonctions quadratiques de x, et A_1, B_1, C_1 les mêmes fonctions de x_1.

Si l'on différentie cette équation, on trouve

$$(A_1 x + B_1)\, dx + (A x_1 + B)\, dx_1 = 0;$$

puis, en tenant compte de la relation entre x et x_1,

$$\sqrt{B_1^2 - A_1 C_1}\, dx + \sqrt{B^2 - A C}\, dx_1 = 0;$$

enfin, en posant

$$\Psi(x) = B^2 - AC,$$

on trouve

$$\frac{dx}{\sqrt{\Psi(x)}} = \frac{dx}{\pm\sqrt{\Psi(x_1)}}.$$

Le polynome $\Psi(x)$ est du quatrième degré en x et l'on passe du premier terme au second en remplaçant x par x_1.

Cette équation différentielle du premier ordre se nomme une *équation d'Euler* et l'on voit que, la conique (S) étant donnée, une conique (Σ) conduit à une intégrale particulière d'une équation d'Euler définie par le polynome

$$\Psi(x) = B^2 - AC.$$

3. Cela posé, la question à résoudre est la suivante :

Le polynome $\Psi(x)$ étant *donné*, savoir

$$\Psi(x) = a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4,$$

et la conique (S) étant définie comme plus haut, déterminer la conique enveloppe (Σ) de façon que l'équation d'Euler correspondant à (Σ) soit précisément

$$\pm\frac{dx}{\sqrt{\Psi(x)}} = \frac{dx_1}{\sqrt{\Psi(x_1)}}.$$

On va voir que le problème ainsi posé est possible et que la solution dépend d'une constante arbitraire.

Pour cela, il suffit d'interpréter géométriquement l'équation

$$\Psi(x) \equiv B^2 - AC = 0.$$

Cette équation, du quatrième degré en x, donne les valeurs de x pour chacune desquelles les deux valeurs correspondantes de x_1 sont confondues, c'est-à-dire elle détermine les points de (S) tels que les deux tangentes menées de l'un de ces points à la conique (Σ) sont confondus ou enfin les points où (S) est rencontrée par (Σ).

Quand $\Psi(x)$ est donné, la conique (Σ) est assujettie à la condition de couper (S) aux quatre points définis par l'équation

$$\Psi(x) \equiv a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4 = 0.$$

On trouve facilement [1] que l'équation générale des coniques (Σ) satisfaisant à cette condition est

$$a_0 X^2 + 2 a_1 XY + a_2 Y^2 + 2 a_2 X + 2 a_3 Y + a_4 + \lambda(Y^2 - 4X) = 0.$$

La conique (Σ) étant ainsi déterminée, pour avoir l'équation biquadratique entre x et x_1, il faut prendre l'équation tangentielle de (Σ) et écrire que cette équation tangentielle est vérifiée par les coordonnées de la droite

$$X - \frac{(x + x_1)}{2} Y + x x_1 = 0$$

qui joint les points de paramètres x et x_1.

---

[1] Voir *Représentation géométrique des covariants d'une forme biquadratique* (*Nouvelles Annales*, p. 341; 1898.

On trouve de cette façon l'équation

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 - 2\lambda & 1 \\ a_1 & a_2 + \lambda & a_3 & -\dfrac{x+x_1}{2} \\ a_2 - 2\lambda & a_3 & a_4 & xx_1 \\ 1 & -\dfrac{x+x_1}{2} & xx_1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

qui contient une constante arbitraire λ. C'est l'intégrale générale de l'équation différentielle *donnée*, savoir

$$\frac{dx}{\sqrt{\Psi(x)}} = \frac{dx_1}{\sqrt{\Psi(x_1)}},$$

où

$$\Psi(x) \equiv a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4.$$

Cette forme d'intégrale a été donnée par Stieljes (*Bulletin des Sciences mathématiques*, année 1888, p. 222). Si l'on développe le déterminant et si l'on cherche à mettre en évidence des invariants et des covariants du polynome du quatrième degré $\Psi(x)$, on trouve

$$\left(\tfrac{1}{12}S - \lambda^2\right)(x-y)^2 + \lambda \Psi_x^y + H_x^y = 0.$$

Dans cette équation, S désigne l'invariant

$$S = a_0 a_4 + 2 a_1 a_3 - 3 a_2^2,$$

Ψ_x^y est une polaire de $\Psi(x)$, savoir

$$\begin{aligned} \Psi_x^y \equiv\; & y^2(a_0 x^2 + 2 a_1 x + a_2) \\ & + 2y(a_1 x^2 + 2 a_2 x + a_3) + (a_2 x^2 + 2 a_3 x + a_4) \\ \equiv\; & \tfrac{1}{12}(y^2 \Psi''_{x^2} + 2yt\Psi''_{xt} + t^2 \Psi''_{t^2}) \end{aligned}$$

(t désignant la variable d'homogénéité), H_x^y se déduit du Hessien $H(x)$ comme Ψ_x^y se déduit de $\Psi(x)$ et

$$\begin{aligned} H(x) = (a_0 a_2 - a_1^2)x^4 &+ 2(a_0 a_3 - a_1 a_2)x^3 \\ &+ (a_0 a_4 + 2 a_1 a_3 - 3 a_2^2)x^2 \\ &- 2(a_1 a_4 - a_2 a_3)x + (a_2 a_4 - a_3^2). \end{aligned}$$

4. Le discriminant de (Σ)

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 - 2\lambda \\ a_1 & a_2 + \lambda & a_3 \\ a_2 - 2\lambda & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

développé est

$$-(4\lambda^3 - S\lambda - T),$$

S et T désignant les invariants de $\Psi(x)$; c'est le premier membre de l'*équation canonisante* relative au polynome du quatrième degré $\Psi(x)$. Quand λ annule ce discriminant, la conique (Σ) correspondante se réduit à deux droites; le premier membre de son équation tangentielle est le carré du premier membre de l'équation tangentielle du point double.

Donc *quand λ est racine de l'équation canonisante*

$$4\lambda^3 - S\lambda - T = 0,$$

le premier membre de l'équation biquadratique en x et y devient le carré d'une expression bilinéaire en x et y. La relation considérée est alors

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & 1 \\ a_1 & a_2 + \lambda & -\dfrac{x+y}{2} \\ a_2 - 2\lambda & a_3 & xy \end{vmatrix}^2 = 0.$$

5. *Cas particulier où* $\Psi(x) \equiv 4x^3 - g_2 x - g_3$. — Il suffit dans les résultats précédents de faire

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = -\tfrac{1}{4} g_2, \qquad a_4 = -g_3;$$

l'équation canonisante devient

$$4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3 = 0.$$

L'intégrale générale de l'équation d'Euler correspondante

$$\frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}},$$

est

$$\lambda^2(x-y)^2+\lambda\Psi_x^y+\Pi(x,y),$$

où

$$\Psi_x^y=(2xy-\tfrac{1}{2}g_2)(x+y)-g_3,$$
$$\Pi(x,y)=(xy+\tfrac{1}{4}g_2)^2+g_3(x+y).$$

Désignons par e_1, e_2, e_3 les racines de l'équation canonisante

$$4\lambda^3-g_2\lambda-g_3=0.$$

Lorsque l'on remplace, dans la relation biquadratique entre x et y, λ par l'une de ces racines, e_1 par exemple, nous savons que le premier membre devient le carré d'une fonction bilinéaire de x et de y. En développant les calculs dans ce cas particulier et en tenant compte de l'identité

$$4\lambda^3-g_2\lambda-g_3\equiv 4(\lambda-e_1)(\lambda-e_2)(\lambda-e_3),$$

on trouve que la relation bilinéaire entre x et y, qui correspond à $\lambda=e_1$, est

$$(x-e_1)(y-e_1)=(e_1-e_2)(e_1-e_3).$$

6. La relation biquadratique entre x et y, qui contient au second degré la constante λ, peut être considérée comme une formule d'addition pour la fonction $p(u;\,g_2,g_3)$ dont les invariants g_2 et g_3 sont liés d'une manière convenable aux invariants du polynome biquadratique $\Psi(x)$.

Dans le cas particulier considéré au n° 5, si l'on pose

$$x=p(u;\,g_2,g_3),\qquad y=p(u_1;\,g_2,g_3),$$

l'équation du deuxième degré en λ

$$\lambda^2(x-y)^2+\lambda\Psi_x^y+\Pi(x,y)$$

admet comme racine

$$p(u-u_1)\qquad\text{et}\qquad p(u+u_1):$$

on le vérifie immédiatement en se reportant aux formules qui donnent

$$p(u - u_1) + p(u + u_1) \qquad \text{et} \qquad p(u - u_1)\, p(u + u_1).$$

Dans le cas général, si l'on relie les invariants de la fonction elliptique aux invariants S et T de $\Psi(x)$ par les égalités

$$g_2 = \tau^4 \mathrm{S}, \qquad g_3 = \tau^6 \mathrm{T},$$

où τ désigne un facteur de proportionnalité, et si l'on définit un argument v par les égalités

$$\frac{1}{\tau^2}\, pv = \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0}, \qquad \frac{1}{\tau^3}\, p'v = \frac{a_3 a_0^2 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3}{\sqrt{a_0^3}},$$

enfin si l'on fait correspondre à x un argument u et à y un argument u_1 par les formules

$$\frac{\tau}{\sqrt{a_0}}(a_0 x + a_1) = \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv},$$

$$\frac{\tau}{\sqrt{a_0}}(a_0 y - a_1) = \frac{1}{2}\,\frac{p'u_1 - p'v}{pu_1 - pv},$$

les racines de l'équation du second degré en λ sont

$$\frac{1}{\tau^2}\, p(u - u_1) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\tau^2}\, p(u + u_1 + v).$$

Ces résultats se rattachent de très près à l'inversion de l'intégrale elliptique

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\Psi(x)}};$$

nous renverrons pour leur démonstration dans le cas général au *Traité des fonctions elliptiques* d'Halphen, 2e Volume, pages 356 et 360.