Genese

Sur quelques intégrales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 273-274

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__273_1>

[C2e]

SUR QUELQUES INTÉGRALES;

PAR M. le Professeur GENESE,
De l'Université du Pays de Galles

Dans le *Cours d'Analyse* de M. Hermite, édition de 1873, p. 260, l'auteur dit :

« En posant

$$u = x\sin x + \cos x, \qquad v = \sin x - x\cos x,$$

on n'a aucun procédé pour trouver directement

$$\int \frac{x^2\,dx}{u^2} = \frac{v}{u}, \qquad \int \frac{x^2\,dx}{v^2} = -\frac{u}{v},$$

$$\int \frac{bx^2\,dx}{(au+bv)^2} = -\frac{u}{au+bv}.$$

Nous pourrions encore citer, en désignant toujours par a et b des constantes, cette intégrale

$$\int \frac{a\,dx}{[a+(ax+b)\operatorname{tang} x]^2} = \frac{\operatorname{tang} x}{a+(ax+b)\operatorname{tang} x},$$

dont on ne peut vérifier la valeur que par la différentiation. »

Voici comment on peut combler la lacune :

En posant $\theta = x - \operatorname{arc\,tang} x$, on a

$$d\theta = \frac{x^2\,dx}{1+x^2}, \qquad \cos\theta = \cos x\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \sin x\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

alors

$$\operatorname{séc}^2\theta\,d\theta = \frac{x^2\,dx}{(\cos x + x\sin x)^2};$$

et la première intégrale égale

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\operatorname{tang} x - x}{1+x\operatorname{tang} x} = \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}.$$

En outre

$$\sin\theta = \sin x\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \cos x\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

et la seconde intégrale est

$$\int \frac{d\theta}{\sin^2\theta} = -\cot\theta.$$

La troisième se change en

$$\int \frac{b\,d\theta}{(a\cos\theta+b\sin\theta)^2} = \int \frac{b\,d\operatorname{tang}\theta}{(a+b\operatorname{tang}\theta)^2} = -\frac{1}{a+b\operatorname{tang}\theta}, \ \ldots.$$

La quatrième ne présente absolument pas de difficulté.

L'intégrale est

$$\int \frac{a\cot^2 x\,dx}{(a\cot x + ax + b)^2} = \int \frac{-a\,d(\cot x + x)}{(a\cot x + ax + b)^2}$$
$$= \frac{1}{a\cot x + ax + b}.$$