Nouvelles annales de mathématiques

F. Caspary

Applications des méthodes de Grassmann; vecteurs dans le plan; définitions, propriétés

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 248-273

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__248_0>

[B12c] [K9a]

APPLICATIONS DES MÉTHODES DE GRASSMANN (¹); VECTEURS DANS LE PLAN; DÉFINITIONS, PROPRIÉTÉS;

Par M. F. CASPARY.

1. *Notions préliminaires.* — Soient A, B, C trois points quelconques; les différences C — B, A — C, B — A représentent alors (voir *Nouvelles Annales*, t. XVII, p. 391, 1898; définition 4°) des vecteurs dans le plan A, B, C, définis en grandeur, sens et direction.

Dans ce Mémoire, je ne m'occupe que des vecteurs dans le plan. Pour les désigner, j'emploierai dès lors les minuscules de l'alphabet latin *en caractères gras;* conséquemment je pose

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} C - B &= \mathbf{a},\\ A - C &= \mathbf{b},\\ B - A &= \mathbf{c}.\end{aligned}\right.$$

Quant à la *grandeur* (longueur) des vecteurs, j'emploie, pour la désigner, les minuscules de l'alphabet latin en *caractères romains,* de façon que les longueurs des vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ sont désignées par a, b, c. Par conséquent, les caractères a, b, c représentent les côtés BC, CA, AB du triangle ABC (*fig.* 1).

Comme les *vecteurs* sont définis en grandeur, sens et direction, *ils peuvent être transportés, dans le plan, parallèlement à eux-mêmes.* De là résulte que le vecteur $\mathbf{a}$, défini jusqu'à présent par C — B, représente aussi chaque vecteur du plan, ayant la longueur a, étant

(¹) Voir *Nouvelles Annales*, t. XVII, p. 389; 1898.

parallèle à $\mathbf{a}$ et de même sens que $\mathbf{a}$. En désignant un vecteur qui possède ces trois propriétés par $\mathbf{a}'$, on aura $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$. Réciproquement l'égalité $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$ exprime que les deux vecteurs $\mathbf{a}'$ et $\mathbf{a}$ sont parallèles, de même longueur et de même sens. De plus, l'égalité $\mathbf{a}' = - \mathbf{a}$ exprime que les deux vecteurs $\mathbf{a}'$ et $\mathbf{a}$ sont parallèles, de

Fig. 1.

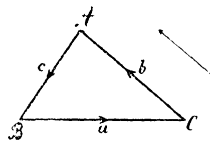
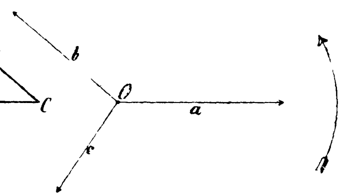


Fig. 1 *bis*.



même longueur, mais de sens opposé. Enfin l'égalité $\mathbf{a}' = \lambda\mathbf{a}$ exprime que les deux vecteurs $\mathbf{a}'$ et $\mathbf{a}$ sont parallèles, que leurs longueurs a' et a sont dans le rapport $\lambda : 1$, et que leur sens est le même ou opposé, suivant que λ est positif ou négatif.

Pour désigner, dans les figures (diagrammes), le sens d'un vecteur, j'emploierai une *flèche* dont la pointe marque la direction positive.

Comme les vecteurs peuvent être transportés parallèlement à eux-mêmes, à un diagramme quelconque correspond un autre diagramme, où les vecteurs sont issus d'un même point O. Je donne à ce point O le nom de *pôle*, et j'appelle conséquemment le diagramme correspondant *diagramme polaire*. Le diagramme polaire met en évidence les *relations angulaires*, si l'on fixe encore un *sens de rotation*. Dans les articles suivants, j'emploierai comme *sens de rotation le sens opposé à celui des aiguilles d'une montre*.

Ceci établi, j'appelle *angle formé par les vecteurs* $\mathbf{a}$

et **b** *l'angle que la direction positive du vecteur* **a** *doit décrire, dans le sens de rotation fixé, pour coïncider avec la direction positive du vecteur* **b**. Comme les directions positives des vecteurs sont marquées par les *pointes des flèches,* on peut aussi dire que *l'angle formé par les vecteurs* **a** *et* **b** *est celui que la pointe de la flèche de* **a** *doit décrire, dans le sens de rotation fixé, pour coïncider avec la pointe de la flèche de* **b**.

Je désignerai, dès lors, *l'angle formé par les vecteurs* **a** *et* **b** *par* (**a**, **b**).

Pour illustrer les notions que je viens d'établir, j'envisage le triangle ABC. La *fig.* 1 montre ce triangle et les vecteurs **a**, **b**, **c**, définis par les égalités (1), avec leurs flèches. En menant par le point O trois vecteurs, respectivement = **a**, **b**, **c**, on obtient le diagramme polaire (*fig.* 1 *bis*) du triangle ABC (*fig.* 1). Ce diagramme polaire met en évidence que la somme des angles (**b**, **c**), (**c**, **a**), (**a**, **b**) est égale à 2π ou à quatre angles droits. De plus ce diagramme polaire met en évidence que

$$(2) \qquad \begin{cases} (\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \pi - \alpha, \\ (\mathbf{c}, \mathbf{a}) = \pi - \beta, \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \pi - \gamma, \end{cases}$$

où α, β, γ sont les angles intérieurs du triangle ABC, dont la somme est égale à π.

2. *Définition des produits extérieur et intérieur de deux vecteurs* **a**, **b**.

Si l'on désigne par a, b *les longueurs des vecteurs* **a**, **b** :

1° *Le produit extérieur des vecteurs* **a**, **b**, *représenté par* [**ab**], *est défini par l'égalité*

$$[\mathbf{ab}] = \mathrm{ab} \sin(\mathbf{a}.\mathbf{b});$$

2° *Le produit intérieur des vecteurs* **a**, **b**, *repré-*

senté par $[\mathbf{a} \mid \mathbf{b}]$, *est défini par l'égalité*

$$[\mathbf{a} \mid \mathbf{b}] = \mathrm{ab}\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Si le vecteur $\mathbf{b}$ est parallèle au vecteur $\mathbf{a}$, et tout particulièrement si $\mathbf{b}$ coïncide avec $\mathbf{a}$, on a $\mathbf{b} = \mathbf{a}$; $\mathrm{b} = \mathrm{a}$; $\sin(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$; $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = +1$.

Par conséquent, on tire des définitions 1° et 2°,

$$(3) \qquad \begin{cases} [\mathbf{a}\ \ \mathbf{a}] = 0, \\ [\mathbf{a} \mid \mathbf{a}] = \mathrm{a}^2. \end{cases}$$

En désignant, de plus, par l'exposant $\frac{1}{2}$ la racine carrée, prise avec le signe positif, on obtient

$$(4) \qquad \mathrm{a} = [\mathbf{a} \mid \mathbf{a}]^{\frac{1}{2}}$$

et l'on voit *que la longueur* a *d'un vecteur* $\mathbf{a}$ *est déterminée par la racine carrée, prise avec le signe positif, du produit intérieur* $[\mathbf{a} \mid \mathbf{a}]$.

Comme d'après la définition de l'angle $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, l'angle $(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ est égal à $2\pi - (\mathbf{a}, \mathbf{b})$, des définitions 1° et 2° dérivent encore les formules

$$(5) \qquad \begin{cases} [\mathbf{a}\ \ \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}\ \ \mathbf{a}], \\ [\mathbf{a} \mid \mathbf{b}] = \ \ [\mathbf{b} \mid \mathbf{a}], \end{cases}$$

d'où résultent les théorèmes :

I. *Si l'on change dans un produit extérieur de deux vecteurs l'ordre des vecteurs, le produit extérieur change de signe.*

II. *Si l'on change dans un produit intérieur de deux vecteurs l'ordre des vecteurs, le produit intérieur reste invariable.*

Comme les expressions $[\mathbf{ab}]$ et $[\mathbf{a} \mid \mathbf{b}]$ sont appelées *produits* extérieur et intérieur, j'appelle encore les algorithmes qui lient $\mathbf{a}$ à $\mathbf{b}$ *multiplications* extérieure et intérieure et je dis que dans les produits $[\mathbf{ab}]$ et $[\mathbf{a}|\mathbf{b}]$ les deux vecteurs sont *multipliés*, l'un par l'autre, *extérieurement* et *intérieurement*.

3. *Somme et différence de deux vecteurs. Somme algébrique de vecteurs quelconques. Théorèmes.*

Soient $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$ deux vecteurs quelconques. Comme

Fig. 2

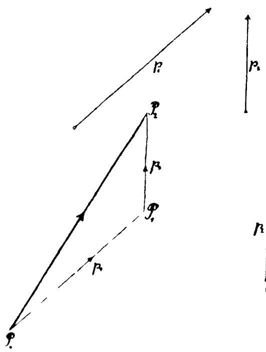
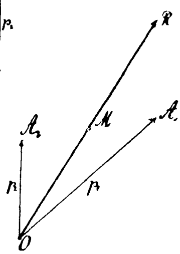


Fig. 2 *bis*.



$$P_2 - P_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 2(M - O) = R - O.$$

les vecteurs peuvent être transportés, parallèlement à eux-mêmes, on peut les porter bout à bout (*fig.* 2) et poser

$$\begin{cases} \mathbf{p}_1 = P_1 - P_0, \\ \mathbf{p}_2 = P_2 - P_1, \end{cases}$$

d'où suit

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = P_2 - P_0.$$

Comme le vecteur $-\mathbf{p}_2$ (*fig.* 3) représente le vecteur parallèle à $\mathbf{p}_2$, de même longueur que $\mathbf{p}_2$, mais de sens opposé, on a :

III. *Pour construire la somme (différence) de deux* *vecteurs quelconques* $\mathbf{p}_1$ *et* $\mathbf{p}_2$, *on mène par un point quelconque* P_0 *le vecteur* $P_1 - P_0$, *égal à* $\mathbf{p}_1$, *et par le point* P_1 *le vecteur* $P_2 - P_1$, *égal à* $\mathbf{p}_2$ (*à* $-\mathbf{p}_2$); *le*

Fig. 3.

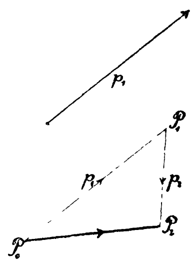
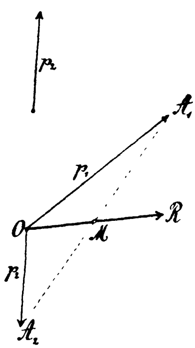


Fig. 3 *bis*.



$$P_2 - P_0 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = 2(M - O) = R - O.$$

vecteur $P_2 - P_0$ *représentera la somme* (*différence*) *des deux vecteurs* $\mathbf{p}_1$ *et* $\mathbf{p}_2$.

Plus généralement soient $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ n vecteurs quelconques; leur somme algébrique

$$\varepsilon_1 \mathbf{p}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{p}_2 + \ldots + \varepsilon_n \mathbf{p}_n \qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1),$$

devient, si l'on pose :

$$(6) \qquad \begin{cases} \mathbf{p}_1 = \varepsilon_1 (P_1 - P_0), \\ \mathbf{p}_2 = \varepsilon_2 (P_2 - P_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathbf{p}_n = \varepsilon_n (P_n - P_{n-1}), \end{cases}$$

égale à $P_n - P_0$. Donc

IV. *Pour construire la somme algébrique*

$$\varepsilon_1 \mathbf{p}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{p}_2 + \ldots + \varepsilon_n \mathbf{p}_n \qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1),$$

des vecteurs quelconques $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$, *on mène par un point quelconque* P_0 *le vecteur* $P_1 - P_0 = \varepsilon_1 \mathbf{p}_1$,

Fig. 4.

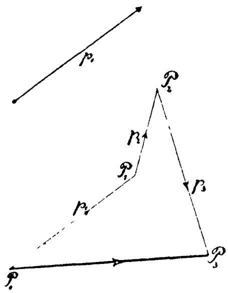
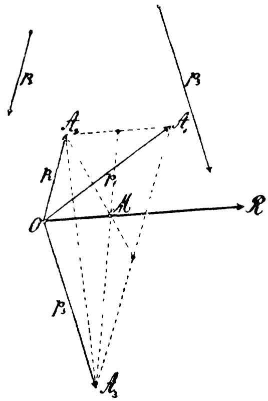


Fig. 4 *bis*.



$$P_3 - P_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = 3(M - O) = R - O.$$

c'est-à-dire parallèle à $\mathbf{p}_1$, *de même longueur que* $\mathbf{p}_1$ *et de même sens ou de sens opposé, suivant que* ε_1 *est positif ou négatif; par le point* P_1 *on mène le vecteur* $P_2 - P_1 = \varepsilon_2 \mathbf{p}_2$, *etc. En continuant cette construction jusqu'au dernier vecteur* $P_n - P_{n-1} = \varepsilon_n \mathbf{p}_n$, *le vecteur* $P_n - P_0$ *représentera la somme algébrique* $\varepsilon_1 \mathbf{p}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{p}_2 + \ldots + \varepsilon_n \mathbf{p}_n$.

Si le point P_n coïncide avec le point P_0, la différence $P_n - P_0$ est égale à o; dans ce cas le polygone $P_1, P_2, \ldots, P_n$ se ferme. Donc

V. *La formule*

$$\varepsilon_1 \mathbf{p}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{p}_2 + \ldots + \varepsilon_n \mathbf{p}_n = 0$$

exprime que les vecteurs $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ *peuvent former un polygone fermé.*

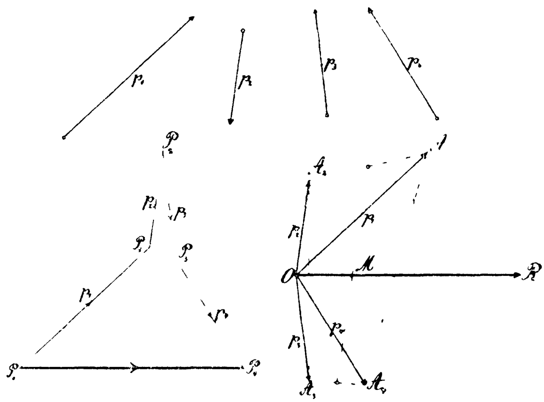
Dans le cas où $n = 3$, ce théorème est représenté par la formule

$$(7) \qquad \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0,$$

qui résulte des formules (1) et exprime que l'on peut former un triangle avec les vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Donc

V_1. *Si trois vecteurs* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *sont liés par la relation* $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$, *on peut en former un triangle.*

Fig. 5. Fig. 5 *bis*.



$$P_4 - P_0 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p} - \mathbf{p}_4 = 4(M - O) = R - O.$$

Les *fig.* 2, 3, 4, 5, 6 montrent, dans le cas de deux, trois, quatre ou cinq vecteurs, la construction de la somme algébrique, établie en IV.

On a, dans la *fig.* 2, $P_2 - P_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$; dans la *fig.* 3, $P_2 - P_0 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$; dans la *fig.* 4, $P_3 - P_0 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$; dans la *fig.* 5, $P_4 - P_0 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4$; dans la *fig.* 6, $P_5 - P_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_5$.

A la construction polygonale IV qui est connue correspond la *construction polaire* de la somme algébrique

$$\varepsilon_1 \mathbf{p}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{p}_2 + \ldots + \varepsilon_n \mathbf{p}_n \qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1)$$

que je crois nouvelle.

En effet, au lieu de porter les vecteurs $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ bout à bout, on peut prendre un point quelconque O comme origine commune. Alors on peut poser

$$(6\,bis)\qquad \begin{cases} \mathbf{p}_1 = \varepsilon_1(\mathrm{A}_1 - \mathrm{O}), \\ \mathbf{p}_2 = \varepsilon_2(\mathrm{A}_2 - \mathrm{O}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathbf{p}_n = \varepsilon_n(\mathrm{A}_n - \mathrm{O}). \end{cases}$$

En formant l'expression $\varepsilon_1\mathbf{p}_1 + \varepsilon_2\mathbf{p}_2 + \ldots + \varepsilon_n\mathbf{p}_n$ on obtient

$$\varepsilon_1\mathbf{p}_1 + \varepsilon_2\mathbf{p}_2 + \ldots + \varepsilon_n\mathbf{p}_n = n(\mathrm{M} - \mathrm{O}),$$

où le point M, défini par

$$n\mathrm{M} = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{A}_n,$$

est le *point moyen* des points $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots \mathrm{A}_n$ dont la construction dérive immédiatement des définitions 1° et 2° du premier article (voir *Nouvelles Annales*, t. XVII, 1898, théorèmes II, p. 394, et XIII, p. 404). Donc

IV *bis*. *Pour construire la somme algébrique*

$$\varepsilon_1\mathbf{p}_1 + \varepsilon_2\mathbf{p}_2 + \ldots + \varepsilon_n\mathbf{p}_n \qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1)$$

des vecteurs $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$, *on mène par un pôle quelconque* O *les vecteurs*

$$\mathrm{A}_1 - \mathrm{O} = \varepsilon_1\mathbf{p}_1, \qquad \mathrm{A}_2 - \mathrm{O} = \varepsilon_2\mathbf{p}_2, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{A}_n - \mathrm{O} = \varepsilon_n\mathbf{p}_n,$$

c'est-à-dire parallèles respectivement à $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$, *de même longueur que* $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ *et de même sens ou de sens opposé; suivant que* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ *sont positifs ou négatifs. On construit alors le point moyen* M *des points* $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$, *défini par*

$$n\mathrm{M} = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{A}_n;$$

le vecteur M — O, *pris n fois, représentera la somme* *algébrique*

$$\varepsilon_1 \mathbf{p}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{p}_2 + \ldots + \varepsilon_n \mathbf{p}_n = n(\mathrm{M} - \mathrm{O}) = \mathrm{R} - \mathrm{O}.$$

Dans les figures polaires 2 *bis*, 3 *bis*, 4 *bis*, 5 *bis*, 6 *bis* le point moyen M est construit pour $n = 2, 3, 4, 5$. Le point M est : pour $n = 2$, le milieu du segment $A_1 A_2$ (*fig.* 2 *bis* et *fig.* 3 *bis*); pour $n = 3$, le centre de gravité du triangle $A_1 A_2 A_3$ (*fig.* 4 *bis*); pour $n = 4$, le milieu du segment qui joint les milieux de deux côtés opposés du quadrilatère $A_1 A_2 A_3 A_4$ (*fig.* 5 *bis*); pour $n = 5$, le point d'intersection des droites $A_i M_i$, M_i étant le point moyen du quadrilatère $A_k A_l A_m A_n$; $i, k, l, m, n = 1, 2, 3, 4, 5$ (*fig.* 6 *bis*). Pour un n quelconque, le point moyen est le point d'intersection des droites $A_i M_i$, M_i étant le point moyen du polygone $A_1 A_2 \ldots A_{i-1} A_{i+1} \ldots A_n$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Le vecteur R — O, dans les *fig.* 2 *bis* et 3 *bis*; 4 *bis*; 5 *bis*; 6 *bis* égal respectivement à $2(\mathrm{M} - \mathrm{O})$; $3(\mathrm{M} - \mathrm{O})$; $4(\mathrm{M} - \mathrm{O})$; $5(\mathrm{M} - \mathrm{O})$ représente $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ (*fig.* 2 *bis*); $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$, (*fig.* 3 *bis*); $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$ (*fig.* 4 *bis*); $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4$ (*fig.* 5 *bis*); $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_5$ (*fig.* 6 *bis*), et l'on voit que ce vecteur R — O est parallèle et égal au vecteur correspondant $P_2 - P_0$; $P_3 - P_0$; $P_4 - P_0$; $P_5 - P_0$ des figures polygonales 2 et 3, 4, 5, 6 et qu'il a le même sens.

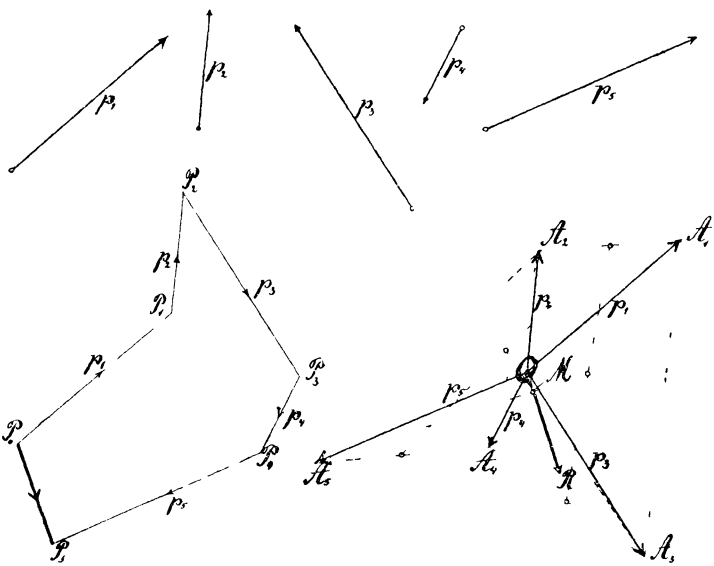
4. *Théorème fondamental, relatif à trois vecteurs quelconques.* — D'après le théorème V_1, entre trois vecteurs **a**, **b**, **c** formant un triangle existe la relation $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$. Ce théorème n'est qu'un cas particulier du théorème suivant :

VI. *Entre trois vecteurs quelconques* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, *existe toujours une relation linéaire de la forme*

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{a}_3 = 0,$$

α_1, α_2, α_3 *étant des coefficients positifs ou négatifs.*

Fig. 6. Fig. 6 *bis*.



$$P_5 - P_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_5 = 5(M - O) = R - O$$

Pour démontrer ce théorème, je fais remarquer que les vecteurs $\alpha_1 \mathbf{a}_1$, $\alpha_2 \mathbf{a}_2$, $\alpha_3 \mathbf{a}_3$ pourront toujours être transportés parallèlement à eux-mêmes, de façon à former un triangle $A_1 A_2 A_3$. Comme les vecteurs $A_3 - A_2$, $A_1 - A_3$, $A_2 - A_1$ sont parallèles respectivement à $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, on aura

$$\begin{cases} A_3 - A_2 = \alpha_1 \mathbf{a}_1 \\ A_1 - A_3 = \alpha_2 \mathbf{a}_2 \\ A_2 - A_1 = \alpha_3 \mathbf{a}_3 \end{cases}$$

Suivant que $A_3 - A_2$, $A_1 - A_3$, $A_2 - A_1$ sont de même sens que $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ ou de sens opposé, les coefficients α_1, α_2, α_3 seront positifs ou négatifs et, quant à leurs valeurs numériques, ces coefficients représentent les rapports $A_2A_3 : a_1$, $A_3A_1 : a_2$, $A_1A_2 : a_3$; a_1, a_2, a_3 étant les longueurs des vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. En ajoutant les formules précédentes, le théorème VI est démontré.

On peut aussi donner à ce théorème l'énoncé suivant :

VII. *Chaque vecteur s'exprime d'une façon linéaire par deux vecteurs quelconques.*

5. *Conséquences du théorème VI.* — De la relation linéaire

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3 = 0$$

qui existe entre trois vecteurs quelconques, on peut déduire des conséquences aussi importantes que simples.

En effet, si l'on multiplie la relation

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3 = 0$$

extérieurement par $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, on obtient

$$\begin{cases} \alpha_2[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2] - \alpha_3[\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1] = 0, \\ \alpha_3[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3] - \alpha_1[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2] = 0, \\ \alpha_1[\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1] - \alpha_2[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3] = 0, \end{cases}$$

d'où suit

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = [\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3] : [\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1] : [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2].$$

Par conséquent, on a identiquement

$$[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3]\mathbf{a}_1 + [\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1]\mathbf{a}_2 + [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]\mathbf{a}_3 = 0. \tag{8}$$

Par multiplication extérieure et intérieure, on en tire, $\mathbf{a}_4$ étant un vecteur quelconque,

$$[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3][\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_4] + [\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1][\mathbf{a}_2\,\mathbf{a}_4] + [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2][\mathbf{a}_3\,\mathbf{a}_4] = 0, \tag{9}$$

$$[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3][\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_4] + [\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1][\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_4] + [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2][\mathbf{a}_3|\mathbf{a}_4] = 0. \tag{10}$$

De même, si l'on multiplie intérieurement la relation

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3 = 0,$$

on obtient

$$\begin{cases} \alpha_1[\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_1] + \alpha_2[\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_1] + \alpha_3[\mathbf{a}_3|\mathbf{a}_1] = 0, \\ \alpha_1[\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2] + \alpha_2[\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_2] + \alpha_3[\mathbf{a}_3|\mathbf{a}_2] = 0, \\ \alpha_1[\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_3] + \alpha_2[\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_3] + \alpha_3[\mathbf{a}_3|\mathbf{a}_3] = 0: \end{cases}$$

d'où suit

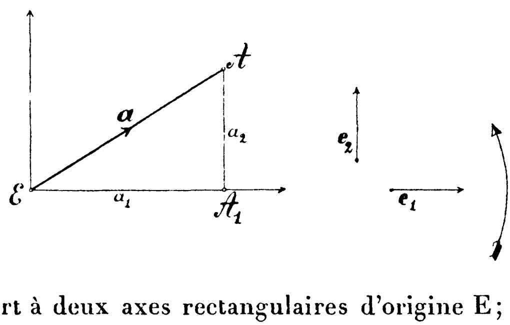
$$(11) \qquad \begin{vmatrix} [\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_1] & [\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_1] & [\mathbf{a}_3|\mathbf{a}_1] \\ [\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2] & [\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_2] & [\mathbf{a}_3|\mathbf{a}_2] \\ [\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_3] & [\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_3] & [\mathbf{a}_3|\mathbf{a}_3] \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(12) \qquad \begin{cases} \mathrm{a}_1^2\mathrm{a}_2^2\mathrm{a}_3^2 - \mathrm{a}_1^2[\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_3]^2 - \mathrm{a}_2^2[\mathbf{a}_3|\mathbf{a}_1]^2 \\ \qquad - \mathrm{a}_3^2[\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2]^2 + 2[\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_3][\mathbf{a}_3|\mathbf{a}_1][\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2] = 0. \end{cases}$$

6. *Expression d'un vecteur au moyen des deux vecteurs unitaires* $\mathbf{e}_1$ *et* $\mathbf{e}_2$. *Nouvelles expressions des produits extérieur et intérieur de deux vecteurs.* — Soient (*fig.* 7) A un point de coordonnées a_1 et a_2 par

Fig. 7.



rapport à deux axes rectangulaires d'origine E; $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ deux vecteurs de longueur égale à l'unité positive et dont les directions positives sont parallèles aux directions positives des axes. J'appelle ces vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ *vecteurs unitaires*.

Alors on a

$$A - E = (A_1 - E) + (A - A_1).$$

Comme

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{A}_1 - \mathrm{E} &= a_1 \mathbf{e}_1, \\ \mathrm{A} - \mathrm{A}_1 &= a_2 \mathbf{e}_2, \end{aligned}\right.$$

on obtient, en posant $\mathrm{A} - \mathrm{E} = \mathbf{a}$,

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2. \tag{13}$$

Donc

VIII. *Le vecteur* $\mathbf{a}$, *dont les projections sur deux axes rectangulaires sont* a_1 *et* a_2, *s'exprime par l'égalité*

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2, \tag{13}$$

où $\mathbf{e}_1$ *et* $\mathbf{e}_2$ *sont les deux vecteurs unitaires.*

D'après ces définitions et les définitions générales du n° 2, les vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ sont soumis aux conditions

$$[\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1] = 0, \qquad [\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2] = 0, \qquad [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2] = 1; \tag{14}$$

$$[\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_1] = 1, \qquad [\mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_2] = 1, \qquad [\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2] = 0. \tag{15}$$

Soit un autre vecteur

$$\mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2.$$

Si l'on multiplie les deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ en tenant compte des conditions (14) ou (15), on obtient deux expressions différentes, savoir

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad \text{et} \quad a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Je vais démontrer que ces expressions sont précisément égales à $[\mathbf{ab}]$ et $[\mathbf{a}|\mathbf{b}]$, de façon que l'on a

$$[\mathbf{ab}] = a_1 b_2 - a_2 b_1, \tag{16}$$

$$[\mathbf{a}|\mathbf{b}] = a_1 b_1 + a_2 b_2. \tag{17}$$

En effet, d'après la *fig.* 8, on a

$$\left\{\begin{aligned} a_1 &= a \cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{a}), & b_1 &= b \cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{b}), \\ a_2 &= a \sin(\mathbf{e}_1, \mathbf{a}), & b_2 &= b \sin(\mathbf{e}_1, \mathbf{b}), \end{aligned}\right. \tag{18}$$

d'où il suit

$$\left\{\begin{aligned} a_1 b_2 - a_2 b_1 &= ab \sin\{(\mathbf{e}_1, \mathbf{b}) - (\mathbf{e}_1, \mathbf{a})\} = ab \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = [\mathbf{ab}], \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 &= ab \cos\{(\mathbf{e}_1, \mathbf{b}) - (\mathbf{e}_1, \mathbf{a})\} = ab \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = [\mathbf{a}|\mathbf{b}]. \end{aligned}\right.$$

Il est bon de remarquer que l'on n'a pas besoin de figure pour établir les égalités (18). Ces égalités se déduisent immédiatement si l'on multiplie extérieurement et intérieurement par $\mathbf{e}_1$ les expressions

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_1 \mathbf{e}_1 - a_2 \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{b} &= b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2. \end{aligned}\right.$$

De cette manière, on obtiendrait par exemple

$$[\mathbf{e}_1|\mathbf{a}] = a_1[\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_1] + a_2[\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2]$$

ou

$$a \cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{a}) = a_1,$$

et de même les autres relations (18) ([1]).

Remarque. — Entre les expressions des vecteurs et des points il y a une liaison étroite. Si l'on donne à l'expression (13) du vecteur $\mathbf{a}$

$$A - E = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2$$

la forme

$$A = E + a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2, \tag{19}$$

on a

IX. *Le point* A, *dont* a_1, a_2 *sont les coordonnées par rapport à deux axes rectangulaires, s'exprime par*

([1]) Les identités qui se présentent parfois dans les problèmes les plus élémentaires de la Géométrie prennent souvent une importance considérable dans les problèmes élevés de l'Analyse. Ainsi les identités obtenues par la substitution des formules (16) et (17) dans les identités (9) et (10) m'ont permis d'établir des relations importantes pour la théorie des fonctions thêta. (Voir *Math. Ann.*, t. XXVIII, p. 493, et *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. XCVI, p. 182 et 324; t. XCVII, p. 165).

l'égalité

(19) $$\mathrm{A} = \mathrm{E} + \mathrm{a}_1 \mathbf{e}_1 + \mathrm{a}_2 \mathbf{e}_2,$$

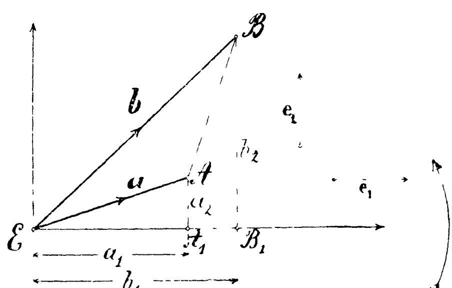
où E *est un point quelconque* et $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ *sont les deux vecteurs unitaires dont les directions positives sont parallèles aux directions positives des axes.*

Dans l'article suivant, je ferai usage de cette expression grassmannienne du point A.

7. *Complément d'un vecteur.* — Pour réunir dans cet article toutes les notions nécessaires aux applications des vecteurs, je vais encore définir le complément d'un vecteur. Soit $\mathbf{m}$ un vecteur quelconque; si l'on fait tourner le vecteur $\mathbf{m}$ d'un angle droit *dans le sens de rotation fixé,* le vecteur ainsi obtenu est le *complément du vecteur* $\mathbf{m}$. Je le désigne par un *trait vertical,* placé devant le caractère $\mathbf{m}$, c'est-à-dire par $|\mathbf{m}$. Donc

X. *Le complément du vecteur* $\mathbf{m}$, *désigné par* $|\mathbf{m}$,

Fig. 8.



est le vecteur que l'on obtient en faisant tourner le vecteur $\mathbf{m}$ *d'un angle droit dans le sens de rotation fixé.*

De cette définition l'on déduit immédiatement que le vecteur $|\mathbf{m}$ a le même sens que $\mathbf{m}$ et la même longueur, mais que l'angle $(\mathbf{m}, |\mathbf{m})$ est égal à $+\frac{1}{2}\pi$.

Si l'on forme le complément du vecteur $|\mathbf{m}$, c'est-à-dire si l'on fait tourner d'un angle droit le vecteur $|\mathbf{m}$, on obtient le vecteur $-\mathbf{m}$. Donc

XI. *Le complément du complément de* $\mathbf{m}$ *est égal à* $-\mathbf{m}$, *ou en formule*

$$||\mathbf{m} = -\mathbf{m}.$$

En appliquant ces définitions aux vecteurs unitaires $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, on a les égalités

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} |\mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2, \\ |\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1, \end{aligned} \right.$$

qui changent les formules (14) et (15) les unes en les autres.

Plus généralement, le produit intérieur peut se déduire du produit extérieur : c'est le produit extérieur d'un vecteur quelconque par le complément d'un autre vecteur.

En effet, le produit extérieur, formé par $\mathbf{a}$ et $|\mathbf{b}$, c'est-à-dire $[\mathbf{a}(|\mathbf{b})]$ est égal à $ab \sin(\mathbf{a}, |\mathbf{b})$. Or, l'angle $(\mathbf{a}, |\mathbf{b})$ est égal à $\frac{1}{2}\pi - (\mathbf{a}, \mathbf{b})$; donc

$$\sin(\mathbf{a}, |\mathbf{b}) = \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

et, par conséquent,

$$[\mathbf{a}|\mathbf{b}] = [\mathbf{a}(|\mathbf{b})].$$

De même, du produit interieur peut se déduire le produit extérieur.

On voit par là que le trait vertical qui apparaît dans le produit intérieur et celui qui représente le complément sont identiques. Dans certaines applications, cette identité possède une importance considérable.

8. *Applications.* — Les notions que je viens d'exposer suffisent pour toute application des vecteurs. Pour en donner quelques exemples, je vais en déduire les éléments de la Trigonométrie, ainsi que quelques théorèmes géométriques.

α. Éléments de la Trigonométrie. — Soient $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ trois vecteurs formant un triangle et liés, conséquemment, par l'égalité

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0. \tag{7}$$

En multipliant cette relation extérieurement par $\mathbf{a}$, on a

$$|\mathbf{aa}|+|\mathbf{ab}|+|\mathbf{ac}|=0.$$

Comme

$$|\mathbf{aa}|=0 \qquad \text{et} \qquad |\mathbf{ac}|=-|\mathbf{ca}|,$$

on obtient

$$|\mathbf{ab}|=|\mathbf{ca}| \tag{21}$$

ou

$$\mathrm{ab}\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})=\mathrm{ca}\sin(\mathbf{c},\mathbf{a}),$$

ou

$$\mathrm{b}\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})=\mathrm{c}\sin(\mathbf{c},\mathbf{a}), \tag{21_1}$$

ou, d'après les formules (2),

$$\mathrm{b}\sin\gamma=\mathrm{c}\sin\beta. \tag{21_2}$$

En multipliant la formule (7) intérieurement par $\mathbf{a}$, on a

$$[\mathbf{a}|\mathbf{a}]+[\mathbf{a}|\mathbf{b}]+[\mathbf{a}|\mathbf{c}]=0, \tag{22}$$

ou

$$\mathrm{a}^2+\mathrm{ab}\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})+\mathrm{ac}\cos(\mathbf{a},\mathbf{c})=0,$$

ou

$$\mathrm{a}+\mathrm{b}\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})+\mathrm{c}\cos(\mathbf{a},\mathbf{c})=0, \tag{22_1}$$

ou, en vertu des formules (2)

$$\mathrm{a}-\mathrm{b}\cos\gamma-\mathrm{c}\cos\beta=0. \tag{22_2}$$

Enfin, si l'on donne à la relation (7) la forme

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = -\mathbf{c}$$

et que l'on forme le produit intérieur des deux membres, on obtient

$$[(\mathbf{a} + \mathbf{b})|(\mathbf{a} + \mathbf{b})] = [\mathbf{c}|\mathbf{c}],$$

ou

$$(23) \qquad [\mathbf{a}|\mathbf{a}] + [\mathbf{b}|\mathbf{b}] + 2[\mathbf{a}|\mathbf{b}] = [\mathbf{c}|\mathbf{c}],$$

ou

$$(23_1) \qquad a^2 + b^2 + 2ab\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = c^2.$$

ou

$$(23_2) \qquad a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2.$$

Par les formules précédentes sont établies les relations fondamentales de la Trigonométrie, hormis les relations

$$(25_2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (b - c)\cos\frac{1}{2}\alpha = a\sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma), \\ (b + c)\sin\frac{1}{2}\alpha = a\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma). \end{array} \right.$$

Pour établir les formules grassmanniennes qui correspondent à ces relations, je fais usage, dans la démonstration, de la même figure que l'on emploie en Trigonométrie ordinaire.

Soit ABC (*fig.* 9) un triangle quelconque;

$$DA = AS = BC = c.$$

Comme les vecteurs $D - C$ et $S - C$ ont la même direction que le vecteur $\mathbf{b}$, on a

$$D - C = \delta\mathbf{b},$$
$$S - C = \sigma\mathbf{b},$$

δ et σ étant des coefficients. Or, de ces égalités résulte

$$CD = \delta b.$$
$$CS = \sigma b.$$

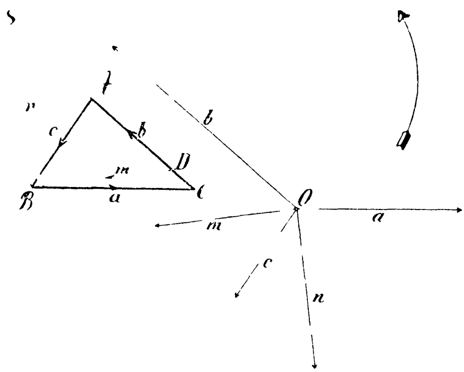
et comme $\mathbf{CD} = \mathrm{b} - \mathrm{c}$, $\mathbf{CS} = \mathrm{b} + \mathrm{c}$, on a

$$\mathrm{b} - \mathrm{c} = \delta \mathrm{b},$$
$$\mathrm{b} + \mathrm{c} = \sigma \mathrm{b},$$

donc

$$\begin{cases} \mathrm{D} - \mathrm{C} = \dfrac{\mathrm{b} - \mathrm{c}}{\mathrm{b}} \mathbf{b} \\ \mathrm{S} - \mathrm{C} = \dfrac{\mathrm{b} + \mathrm{c}}{\mathrm{b}} \mathbf{b} \end{cases}$$

Fig. 9 Fig. 9 *bis*



En substituant ces valeurs dans les identités

$$\begin{cases} (\mathrm{B} - \mathrm{D}) + (\mathrm{D} - \mathrm{C}) + (\mathrm{C} - \mathrm{B}) = 0, \\ (\mathrm{B} - \mathrm{S}) + (\mathrm{S} - \mathrm{C}) + (\mathrm{C} - \mathrm{B}) = 0, \end{cases}$$

et en posant

$$\begin{cases} \mathrm{B} - \mathrm{D} = \mathbf{m}, \\ \mathrm{B} - \mathrm{S} = \mathbf{n}, \end{cases}$$

on obtient

$$(24) \qquad \begin{cases} \mathbf{m} + \dfrac{\mathrm{b} - \mathrm{c}}{\mathrm{b}} \mathbf{b} + \mathbf{a} = 0, \\ \mathbf{n} + \dfrac{\mathrm{b} + \mathrm{c}}{\mathrm{b}} \mathbf{b} + \mathbf{a} = 0 \end{cases}$$

En multipliant extérieurement la première égalité par **m** et la seconde par **n**, on trouve

$$(25)\qquad \begin{cases} \dfrac{b - c}{b}[\mathbf{bm}] = [\mathbf{ma}], \\[2ex] \dfrac{b + c}{b}[\mathbf{bn}] = [\mathbf{na}], \end{cases}$$

d'où suit

$$(25_1)\qquad \begin{cases} (b - c)\sin(\mathbf{b}, \mathbf{m}) = a \sin(\mathbf{m}, \mathbf{a}), \\ (b + c)\sin(\mathbf{b}, \mathbf{n}) = a \sin(\mathbf{n}, \mathbf{a}). \end{cases}$$

Ces formules se transforment immédiatement en les formules (25_2), si de la *fig.* 9 *bis* représentant le diagramme polaire de la *fig.* 9 et des formules (2), l'on déduit les relations angulaires suivantes :

$$(26)\qquad \begin{cases} 1.\ (\mathbf{b}, \mathbf{m}) = \frac{1}{2}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) & = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha, \\ 2.\ (\mathbf{b}, \mathbf{n}) = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) & = \pi - \frac{1}{2}\alpha, \\ 3.\ (\mathbf{m}, \mathbf{a}) = \pi - \frac{1}{2}\{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - (\mathbf{c}, \mathbf{a})\} & = \pi - \frac{1}{2}(\beta - \gamma), \\ 4.\ (\mathbf{n}, \mathbf{a}) = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - (\mathbf{c}, \mathbf{a})\} & = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\beta - \gamma). \end{cases}$$

Si l'on ne veut pas recourir aux diagrammes polaires, le calcul grassmannien permet, dans tous les cas, d'établir directement les relations angulaires. Pour montrer, à titre d'exemple, la manière de procéder, je vais établir par ce calcul les relations (26).

Au moyen de la formule (7), les égalités (24) se changent en

$$(27)\qquad \begin{cases} b\mathbf{m} = b\mathbf{c} + c\mathbf{b}, \\ b\mathbf{n} = b\mathbf{c} - c\mathbf{b}. \end{cases}$$

En multipliant intérieurement la première égalité par **b** et par **c**, on a

$$b[\mathbf{b}|\mathbf{m}] = b[\mathbf{b}|\mathbf{c}] + c[\mathbf{b}|\mathbf{b}], \qquad b[\mathbf{c}|\mathbf{m}] = b[\mathbf{c}|\mathbf{c}] + c[\mathbf{b}|\mathbf{c}],$$

ou

$$[\mathbf{b}|\mathbf{m}] = [\mathbf{b}|\mathbf{c}] + bc, \qquad b[\mathbf{c}|\mathbf{m}] = c\{bc + [\mathbf{b}|\mathbf{c}]\},$$

donc

$$c[\mathbf{b}|\mathbf{m}] = b[\mathbf{c}|\mathbf{m}],$$

ou

$$\cos(\mathbf{b}, \mathbf{m}) = \cos(\mathbf{c}, \mathbf{m}).$$

De même on tire, en multipliant extérieurement la première égalité (27) par **b** et **c**

$$[\mathbf{bm}] = [\mathbf{bc}], \qquad \mathbf{b}[\mathbf{mc}] = \mathbf{c}[\mathbf{bc}],$$

donc

$$\mathbf{c}[\mathbf{bm}] = \mathbf{b}[\mathbf{mc}],$$

ou

$$\sin(\mathbf{b}, \mathbf{m}) = \sin(\mathbf{m}, \mathbf{c}).$$

Comme

$$\sin(\mathbf{b}, \mathbf{m}) = \sin(\mathbf{m}, \mathbf{c}) \qquad \text{et} \qquad \cos(\mathbf{b}, \mathbf{m}) = \cos(\mathbf{m}, \mathbf{c}),$$

on a

$$(\mathbf{b}, \mathbf{m}) = (\mathbf{m}, \mathbf{c}).$$

Or, on a l'identité angulaire

$$(\mathbf{b}, \mathbf{m}) + (\mathbf{m}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c});$$

donc

$$(26_1) \qquad (\mathbf{b}, \mathbf{m}) = (\mathbf{m}, \mathbf{c}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Si l'on multiplie intérieurement les deux égalités (27), on trouve

$$\mathbf{b}^2[\mathbf{m}|\mathbf{n}] = \mathbf{b}^2[\mathbf{c}|\mathbf{c}] - \mathbf{c}^2[\mathbf{b}|\mathbf{b}] = \mathbf{b}^2\mathbf{c}^2 - \mathbf{c}^2\mathbf{b}^2 = 0;$$

par conséquent les deux vecteurs **m** et **n** sont rectangulaires l'un à l'autre, et l'angle $(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \frac{1}{2}\pi$ (voir *fig.* 9 et 9 *bis*).

Or, on a identiquement

$$(\mathbf{b}, \mathbf{m}) + (\mathbf{m}, \mathbf{n}) = (\mathbf{b}, \mathbf{n});$$

donc

$$(26_2) \qquad (\mathbf{b}, \mathbf{n}) = \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

De plus, on a identiquement

$$(\mathbf{m}, \mathbf{a}) = (\mathbf{m}, \mathbf{c}) + (\mathbf{c}, \mathbf{a}) = \tfrac{1}{2}\{(\mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{c}, \mathbf{a}) + (\mathbf{c}, \mathbf{a})\}.$$

ou, comme

$$(\mathbf{b}, \mathbf{c})+(\mathbf{c}, \mathbf{a})+(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 2\pi,$$

$$(26_3) \qquad (\mathbf{m}, \mathbf{a}) = \pi - \tfrac{1}{2}\{(\mathbf{a}, \mathbf{b})-(\mathbf{c}, \mathbf{a})\}.$$

Enfin, il résulte de l'identité angulaire

$$(\mathbf{m}, \mathbf{n})+(\mathbf{n}, \mathbf{a}) = (\mathbf{m}, \mathbf{a}),$$

ou

$$(\mathbf{n}, \mathbf{a}) = (\mathbf{m}, \mathbf{a}) - \tfrac{1}{2}\pi,$$

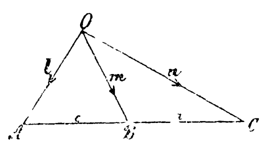
la dernière des relations (26), savoir

$$(26_4) \qquad (\mathbf{n}, \mathbf{a}) = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\{(\mathbf{a}, \mathbf{b})-(\mathbf{c}, \mathbf{a})\}.$$

β. *Théorème de Stewart et sa généralisation.*

Soient (*fig.* 10) A, B, C trois points, situés sur une même droite; O un point quelconque. Si l'on désigne

Fig. 10.



les vecteurs A — O, B — O, C — O par **l**, **m**, **n** et les segments BC, CA, AB par a, b, c, où $a + b + c = 0$, on a

$$\mathbf{m} - \mathbf{n} + (C - B) = 0.$$

Comme les points A, B, C sont situés sur la même droite, le vecteur C — B coïncide avec le vecteur A — C; par conséquent on a

$$(C - B) = \lambda(A - C),$$
$$BC = \lambda\, CA,$$
$$a = \lambda b$$

et

$$C - B = \frac{a}{b}(A - C) = \frac{a}{b}(\mathbf{l} - \mathbf{n}).$$

donc

$$\mathbf{m} - \mathbf{n} + \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}(\mathbf{l} - \mathbf{n}) = 0,$$

ou

$$(28) \qquad \mathrm{a}\mathbf{l} + \mathrm{b}\mathbf{m} + \mathrm{c}\mathbf{n} = 0.$$

Par multiplication intérieure résulte

$$(29) \qquad \mathrm{a}^2[\mathbf{l} \mid \mathbf{l}] + \mathrm{b}^2[\mathbf{m} \mid \mathbf{m}] + 2\mathrm{ab}[\mathbf{l} \mid \mathbf{m}] = \mathrm{c}^2[\mathbf{n} \mid \mathbf{n}].$$

Or on a

$$(\mathrm{B} - \mathrm{A}) = \mathbf{m} - \mathbf{l}:$$

donc

$$\mathrm{c}^2 = \mathrm{m}^2 + \mathrm{l}^2 - 2[\mathbf{l} \mid \mathbf{m}].$$

Par conséquent l'équation (29) prend la forme

$$(30) \qquad \mathrm{a}^2\mathrm{l}^2 + \mathrm{b}^2\mathrm{m}^2 + \mathrm{ab}(\mathrm{m}^2 + \mathrm{l}^2 - \mathrm{c}^2) = \mathrm{c}^2\mathrm{n}^2,$$

ou

$$\mathrm{a}(\mathrm{a} + \mathrm{b})\mathrm{l}^2 + \mathrm{b}(\mathrm{a} + \mathrm{b})\mathrm{m}^2 - \mathrm{abc}^2 = \mathrm{c}^2\mathrm{n}^2.$$

En divisant par $\mathrm{a} + \mathrm{b} = -\mathrm{c}$ résulte la relation

$$\mathrm{al}^2 + \mathrm{bm}^2 + \mathrm{cn}^2 + \mathrm{abc} = 0,$$

d'où suit (1) :

XII$_1$. Théorème de Stewart. — *Si l'on joint un point quelconque* O *aux trois points* A, B, C *situés sur une même droite, les segments* AO, BO, CO; BC, CA, AB *sont liés par la relation*

$$\mathrm{BC}.\mathrm{OA}^2 + \mathrm{CA}.\mathrm{OB}^2 + \mathrm{AB}.\mathrm{OC}^2 + \mathrm{BC}.\mathrm{CA}.\mathrm{AB} = 0.$$

Généralisons le théorème : Soient (*fig.* 11) A, B, C trois points absolument quelconques; $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ les vecteurs $\mathrm{A} - \mathrm{O}$, $\mathrm{B} - \mathrm{O}$, $\mathrm{C} - \mathrm{O}$; l, m, n leurs longueurs.

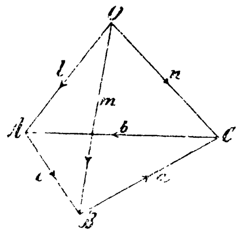
---

(1) *Voir* M. Chasles, *Aperçu historique*, Chap. IV, § 28. 2e édit., p. 175. Paris; 1875.

D'après la formule (12), on a

$$\begin{aligned}\mathrm{l}^2\mathrm{m}^2\mathrm{n}^2 - \mathrm{l}^2[\mathbf{m}\,|\,\mathbf{n}]^2 - \mathrm{m}^2[\mathbf{n}\,|\,\mathbf{l}]^2 - \mathrm{n}^2[\mathbf{l}\,|\,\mathbf{m}]^2 \\ + 2[\mathbf{m}\,|\,\mathbf{n}][\mathbf{n}\,|\,\mathbf{l}][\mathbf{l}\,|\,\mathbf{m}] = 0.\end{aligned}$$

Fig. 11.



Or

$$\begin{aligned}2[\mathbf{m}\,|\,\mathbf{n}] &= \mathrm{m}^2 + \mathrm{n}^2 - \mathrm{a}^2,\\ 2[\mathbf{n}\,|\,\mathbf{l}] &= \mathrm{n}^2 + \mathrm{l}^2 - \mathrm{b}^2,\\ 2[\mathbf{l}\,|\,\mathbf{m}] &= \mathrm{l}^2 + \mathrm{m}^2 - \mathrm{c}^2;\end{aligned}$$

donc

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned}&\mathrm{l}^2\mathrm{m}^2\mathrm{n}^2 - \mathrm{l}^2(\mathrm{m}^2+\mathrm{n}^2-\mathrm{a}^2)^2 - \mathrm{m}^2(\mathrm{n}^2+\mathrm{l}^2-\mathrm{b}^2)^2\\ &\quad - \mathrm{n}^2(\mathrm{l}^2+\mathrm{m}^2-\mathrm{c}^2)^2\\ &\quad + (\mathrm{m}^2+\mathrm{n}^2-\mathrm{a}^2)(\mathrm{n}^2+\mathrm{l}^2-\mathrm{b}^2)(\mathrm{l}^2+\mathrm{m}^2-\mathrm{c}^2) = 0,\end{aligned}\right.$$

d'où résulte (¹) :

XII$_2$. Théorème de Stewart généralisé. — *Entre les six segments qui relient quatre points* A, B, C, O *absolument quelconques, existe toujours la relation suivante :*

$$\begin{aligned}&\mathrm{OA}^2.\mathrm{OB}^2.\mathrm{OC}^2 - \mathrm{OA}^2(\mathrm{OB}^2+\mathrm{OC}^2-\mathrm{BC}^2)^2\\ &\quad - \mathrm{OB}^2(\mathrm{OC}^2+\mathrm{OA}^2-\mathrm{CA}^2)^2 - \mathrm{OC}^2(\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2)^2\\ &\quad + (\mathrm{OB}^2+\mathrm{OC}^2-\mathrm{BC}^2)(\mathrm{OC}^2+\mathrm{OA}^2-\mathrm{CA}^2)(\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2) = 0.\end{aligned}$$

En développant la relation (31), on arrive aux deux formes suivantes dont la première a été donnée dernière-

(¹) *Voir* L.-N.-M. Carnot, *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace*, p. 6 et 7; 1806. Paris.

ment dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (t. IV, p. 26 et aussi p. 163) :

$$(31_1)\quad \left\{\begin{aligned} &(a^2l^2+m^2n^2)(b^2+c^2-a^2)\\ &\quad+(b^2m^2+n^2l^2)(c^2+a^2-b^2)\\ &\quad+(c^2n^2+l^2m^2)(a^2+b^2-c^2)\\ &=a^2l^4+b^2m^4+c^2n^4+a^2b^2c^2\end{aligned}\right.$$

et

$$(31_2)\quad \left\{\begin{aligned} &a^2l^2(m^2+n^2-l^2+b^2+c^2-a^2)\\ &\quad+b^2m^2(n^2+l^2-m^2+c^2+a^2-b^2)\\ &\quad+c^2n^2(l^2+m^2-n^2+a^2+b^2-c^2)\\ &=a^2b^2c^2+m^2n^2a^2+n^2l^2b^2+l^2m^2c^2.\end{aligned}\right.$$

Les applications que je viens de donner ont pour but de familiariser le lecteur avec l'usage des vecteurs et de lui montrer comment certains problèmes peuvent être, grâce à eux, résolus avec une remarquable facilité.

Il me reste, dans un nouvel article, à introduire la *droite* et à y ajouter des applications de l'ensemble des éléments du plan.