Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 241-243

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__241_1>

CORRESPONDANCE.

L'abbé Issaly. — *Sur la question* 1727. — Dans le numéro de février des *Nouvelles Annales,* M. Tzitzéica résout la question 1727, que, vers 1885 environ, j'avais adressée au regretté Ch. Brisse.

Je n'ai qu'à féliciter l'Auteur pour la méthode élégante qu'il emploie dans les paragraphes 1° et 3°. Mais il n'en est pas ainsi de 2°. M. Tzitzéica y tombe précisément dans la faute que j'ai commise, tout le premier, en attribuant à la surface F' une aire beaucoup trop simple. En effet, la formule

$$A = \pi\left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right)\sqrt{R_1 R_2}$$

définit l'aire de la surface F′ *sphéricisée,* en quelque sorte, par la projection de ses éléments fuséiformes successifs sur les fuseaux correspondants des sphères de même diamètre; et comme aux points homologues, les plans tangents sont tout à fait différents, sur les deux surfaces, l'expression des aires n'est pas la même dans les deux.

Vous trouverez, Monsieur, dans un Mémoire que je vous adresse, et qui date de 1889, la correction de cette inexactitude. Elle m'a fourni l'occasion de signaler, à cette époque, trois propriétés principales de ces surfaces, *artificiellement* construites, si l'on veut, que j'ai nommées des *hémicyclides.* Les résultats simples et nullement stériles qu'elles fournissent, en réalité, me semblent leur mériter d'être prises en sérieuse considération.

C'est à vous de décider s'il convient d'attirer l'attention de vos abonnés sur l'illusion séduisante que la question ne manque pas de produire, au premier aspect. Cela fournira peut-être à un amateur l'occasion de chercher l'expression vraie de l'aire de F′, en développant la formule que j'en donne dans mon Mémoire.

A. de Saint-Germain. — *Sur la question* 1727. — L'énoncé de la question 1727 et la solution de M. Tzitzéica (février 1889, p. 95) donnent une expression simple, malheureusement inexacte, pour l'aire A d'une surface F′, lieu (suivant les notations de l'auteur) des centres de courbure en O des sections faites dans une surface F par tous les plans qui passent en O. Regardons F′ comme engendrée par une demi-circonférence OMP dont le diamètre OP est dirigé suivant la normale OZ et égal au rayon de courbure R de la section faite dans F par le plan OMP. Au fuseau OMPP′M′O, limité par la demi-circonférence OMP et la demi-circonférence infiniment voisine, M. Tzitzéica substitue un fuseau sphérique égal à $\frac{1}{2}R^2 d\theta$ et en déduit facilement A.

La substitution n'est pas légitime, comme elle le sera dans le calcul de V.

Pour évaluer A, je fais $ZOM = \varphi$ et j'ai, pour les coordonnées d'un point M,

$$x = R\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta, \quad y = R\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta, \quad z = R\cos^2\varphi;$$

R est une fonction de θ donnée par la formule d'Euler. On a

$$dA = d\theta\, d\varphi \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial z}{\partial\varphi} - \frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2 + \ldots};$$

le calcul donne sans difficulté

$$dA = R\cos\varphi\, d\theta\, d\varphi \sqrt{R^2\sin^2\varphi + \left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2\cos^2\varphi}.$$

La Géométrie conduit rapidement au même résultat. Pour avoir le fuseau OMPP'M'O, on intègre de $\varphi = 0$ à $\varphi = \frac{\pi}{2}$: l'intégrale s'exprime par des fonctions élémentaires, mais n'est égale à $\frac{1}{2}R^2 d\theta$ que si $\frac{dR}{d\theta}$ est nul. L'intégration relative à θ amènera ensuite des fonctions très transcendantes.