Nouvelles annales de mathématiques

Vittorio Nobile

Note de géométrie cinématique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 218-234

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__218_0>

[O8c]

NOTE DE GÉOMÉTRIE CINÉMATIQUE;

PAR M. VITTORIO NOBILE.

Je me propose d'indiquer ici quelques propriétés du mouvement d'un solide de révolution fixé par un point de son axe et assujetti à s'appuyer sur une droite fixe d. Je suppose que le corps ne puisse pas glisser, de manière que le mouvement se réduise à un roulement pur. Dans cette hypothèse le système est à un seul degré de liberté, et un seul paramètre suffira à déterminer le mouvement.

Si nous considérons la droite OM joignant le point fixe O avec le point de contact M du corps mobile avec d, il y aura une position où OM coupera orthogonalement d; c'est cette position que nous choisirons comme initiale [1].

Tous les points tels que M, considérés sur la surface du corps mobile, forment une ligne, que nous appellerons par analogie *polhodie,* dont la détermination est le premier problème qui se présente dans l'étude de ce mouvement.

Soit π le plan perpendiculaire à l'axe du corps et passant par O, et w la distance du point M à ce plan; soit en outre ν l'angle des deux plans passant par l'axe du corps et respectivement par le point M et le point de la polhodie correspondant à la position initiale, et enfin

---

[1] Il est évident que ce choix est absolument arbitraire, le mouvement du corps étant indépendant de la position initiale.

soit u la distance de M à l'axe. D'après ces définitions si

$$w = f(u)$$

est l'équation de la surface du corps, l'élément linéaire de toute ligne tracée sur cette surface est donné par la formule

$$(1) \qquad ds^2 = du^2[1 + f'^2(u)] + u^2 dv^2.$$

Or, puisque la polhodie roule, dans le mouvement, sur la droite fixe, si nous comptons les arcs de polhodie à partir du point où $v = 0$, qui correspond sur la droite au point M_0, l'arc s sera égal, évidemment, au segment M_0M de la droite. Alors le triangle rectangle OM_0M nous fournit deux expressions de l'arc s, savoir

$$(2) \qquad \begin{cases} s = h \operatorname{tang}\theta, \\ s = \sqrt{u^2 + f^2(u) - h^2}. \end{cases}$$

Avec la deuxième de ces relations la formule (1) devient

$$\left(d\sqrt{u^2 + f^2(u) - h^2}\right)^2 = du^2[1 + f'^2(u)] + u^2 dv^2,$$

d'où l'on tire

$$dv = \pm \frac{du}{u}\sqrt{\left(\frac{d}{du}\sqrt{u^2 + f^2(u) - h^2}\right)^2 - [1 + f'^2(u)]},$$

ou encore, en effectuant la dérivation indiquée sous le radical

$$(3) \qquad dv = \pm \frac{du}{u}\sqrt{\frac{h^2[1 + f'^2(u)] - [f(u) - u f'(u)]^2}{u^2 + f^2(u) - h^2}},$$

qui est l'équation différentielle, en coordonnées polaires, de la projection de la polhodie sur le plan d'un parallèle.

2. Avant de continuer l'étude de la polhodie il faut préciser le sens des ϖ positives. Nous pouvons les compter de l'un ou de l'autre côté du point O, mais nous choisirons entre les deux directions celle qui forme avec le segment OM_0 un angle moindre que $\frac{\pi}{2}$. Ceci posé, puisque la droite fixe est la tangente de la polhodie au point M, on trouve par un raisonnement géométrique très simple la relation

$$(4) \qquad \frac{d\varpi}{ds} = \frac{s}{l},$$

où l est la distance, prise avec son signe, du point O au point où l'axe du corps est rencontré par la normale à la surface au point de contact. Cette relation nous montre qu'en général ([1]) dans la position initiale la courbe est tangente au parallèle du point de contact. Il est d'autre part évident que, dans ce cas, elle est symétrique par rapport au méridien de ce point. Pour voir si aux environs de la position étudiée la courbe est située au-dessous ou au-dessus du parallèle, il faudra voir si, au point considéré, ϖ a un maximum ou un minimum. Or on a, en considérant l comme une fonction de s,

$$(5) \qquad \frac{d^2\varpi}{ds^2} = \frac{1}{l} - \frac{s}{l^2}\frac{dl}{ds};$$

donc, si pour $s = 0$ la quantité $\frac{dl}{ds}$ ne devient pas infinie, on aura au point initial

$$\frac{d^2\varpi}{ds^2} = \frac{1}{l},$$

([1]) Le cas où l'on aurait dans la position initiale $l = 0$ sera examiné à part.

c'est-à-dire que, dans le voisinage de ce point, la courbe est située au-dessous ou au-dessus du parallèle selon que la normale à la surface coupe l'axe des w dans la région négative ou dans la positive.

Il est facile de voir que pour $s = 0$ $\frac{dl}{ds}$ reste finie. En effet, on trouve facilement

$$l = \frac{u + ww'}{w'}, \qquad \left[w' = \frac{dw}{du} = f'(u)\right],$$

d'où

$$\frac{dl}{ds} = \frac{dw}{ds} + \frac{w' - uw''}{w'^2}\frac{du}{ds},$$

et puisque

$$\frac{dw}{ds} = \frac{dw}{du}\frac{du}{ds},$$

$$\frac{dl}{ds} = \frac{dw}{ds}\left(1 + \frac{w' - uw''}{w'^3}\right),$$

qui pour $s = 0$ s'annule à cause du facteur $\frac{dw}{ds}$.

Si dans la position initiale $w' = 0$, l devient infini, la courbe est aussi tangente au parallèle, mais pour l'étudier il convient dans ce cas d'examiner la variation de u. On a

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{w'}\frac{dw}{ds} = \frac{s}{u + ww'},$$

$$\frac{d^2u}{ds^2} = \frac{1}{u + ww'} - \frac{s^2(1 + w'^2 + ww'')}{(u + ww')^3},$$

et pour $s = w' = 0$

$$\frac{du}{ds} = 0, \qquad \frac{d^2u}{ds^2} = \frac{1}{u_0}.$$

Au point initial, u est donc minimum, et la projection de la polhodie touche extérieurement le cercle $u = u_0$.

3. Nous pouvons écrire

$$\frac{du}{dv} = \frac{du}{ds}\frac{ds}{dv},$$

ou encore

$$\frac{du}{dv} = \frac{s}{u + ww'}\frac{ds}{dv},$$

et si nous supposons que le roulement sur la droite fixe s'effectue toujours dans le même sens, $\frac{ds}{dv}$ garde toujours le même signe; alors le signe de $\frac{du}{dv}$ dépendra seulement du facteur

$$\frac{s}{u + ww'}.$$

Le signe de cette quantité change, en général, lorsque le corps passe par la position correspondante à la valeur $s = 0$, ensuite il dépend du signe de $u + ww'$. Cette considération fixe à chaque instant le signe à prendre devant le radical qui figure dans la formule

$$u\frac{dv}{du} = \pm\sqrt{\frac{h^2[1 + f'^2(u)] - [f(u) - uf'(u)]^2}{u^2 + f^2(u) - h^2}}.$$

4. Nous allons maintenant étudier le cas où dans la position initiale on aurait $l = 0$, ce qui arrive lorsque OM_0 [1] est la normale à la surface. Nous considérons d'abord le cas particulier, où le point de contact du corps avec la droite dans la position à étudier serait aussi le point de rencontre de la surface avec l'axe de révolution; on aura alors en ce point

$$u = 0, \qquad f(u) = h, \qquad f'(u) = 0;$$

---

[1] Il est impossible que cela arrive dans une autre position du corps, car le plan mené par le point de contact M perpendiculairement à la droite fixe doit contenir la normale à la surface.

par suite, si la fonction $f(u)$ est développable aux environs de $u = 0$ par la formule de Maclaurin, nous pouvons, en négligeant les puissances de u supérieures à la deuxième, poser

$$f(u) = h + \frac{\varepsilon}{2} u^2,$$

où $\varepsilon = f''(0)$. On trouve alors tout de suite

$$h^2[1 + f'^2(u)] - [f(u) - u f'(u)]^2 = h\varepsilon u^2(1 + h\varepsilon),$$
$$u^2 + f^2(u) - h^2 = u^2(1 + h\varepsilon),$$

après avoir supprimé les termes en u^3 et en u^4. Alors

$$\frac{u\,dv}{du} = \sqrt{h\varepsilon}. \tag{6}$$

Si $\varepsilon < 0$ au point $u = 0$, $f(u)$ a un maximum, la surface tourne donc sa concavité vers le point fixe O, et sa convexité à la droite fixe. Dans ces conditions la formule (6) nous montre qu'autour de ladite position le mouvement est impossible, ce qui était d'ailleurs évident. Si $\varepsilon > 0$ la surface tourne sa convexité au point O. Dans ce cas on voit par la formule (6) que la projection de la polhodie se confond, aux environs du point $u = 0$ avec une *spirale logarithmique;* il s'ensuit que, si au point de départ on a $u = 0$, le corps pivotera indéfiniment autour de son axe de révolution, mais s'il part d'une autre position quelconque, et d'ailleurs parfaitement arbitraire, *il pourra s'approcher autant que l'on voudra de la position où* $u = 0$, *sans jamais l'atteindre.*

5. Plaçons-nous maintenant dans le cas général où dans la position à étudier u serait > 0. Nous pouvons écrire ici

$$f(u) = f + (u - u_0)f' + \tfrac{1}{2}(u - u_0)^2 f'',$$

où $f = f(u_0)$, $f^{(i)} = f^{(i)}(u_0)$. De cette formule on tire, en négligeant les puissances de $(u - u_0)$ supérieures à la deuxième,

$$\begin{gathered} 1 + f'^2(u) = 1 + f'^2 + (u - u_0)^2 f''^2 + 2(u - u_0) f' f'', \\ f(u) - u f'(u) = f - u_0 f' - \tfrac{1}{2}(u^2 - u_0^2) f'', \end{gathered}$$

et, en tenant compte des relations

$$(7) \qquad \begin{cases} u_0^2 + f^2 = h^2, \\ u_0 + f f' = 0, \end{cases}$$

dont la seconde exprime que OM_0 est normale à la surface, on obtient la valeur de l'expression

$$h^2[1 + f'^2(u)] - [f(u) - u f'(u)]^2,$$

savoir

$$\begin{aligned} &(u - u_0)^2 [u_0^2 + f^2 - \tfrac{1}{4}(u + u_0)^2] f''^2 \\ &\quad + (u - u_0)[2(u_0^2 + f^2) - u_0(u + u_0)] f' f'' + (u^2 - u_0^2) f f''. \end{aligned}$$

On peut simplifier, car si l'on groupe les deux derniers termes, leur somme est

$$(u - u_0)(2 f^2 f' - u u_0 f' + u_0^2 f' + u f - u_0 f) f'',$$

ou, ayant égard à la deuxième des formules (7)

$$(u - u_0)^2 (f - u_0 f') f''.$$

Donc

$$\begin{aligned} &h^2[1 + f'^2(u)] - [f(u) - u f'(u)]^2 \\ &\quad = (u - u_0)^2 [f(1 + f'^2 + f f'') - \tfrac{1}{4}(3u_0 + u)(u - u_0) f''] f''. \end{aligned}$$

D'une manière analogue on trouve, après quelques réductions et à l'aide de la deuxième des formules (7)

$$u^2 + f^2(u) - h^2 = (u - u_0)^2 (1 + f'^2 + f f''),$$

donc

$$(8) \qquad \frac{u\, dv}{du} = \pm \sqrt{f f'' - \frac{1}{4} f''^2 \frac{(3u_0 + u)(u - u_0)}{1 + f'^2 + f f''}}.$$

Cette quadrature peut toujours être effectuée en rendant rationnelle la différentielle par une substitution convenable, mais sans entrer dans ces détails l'équation (8) met en évidence une particularité remarquable. Si l'on considère le corps arrivé à la position qui correspond à $u = u_0$, on aura

$$u_0 \left(\frac{dv}{du}\right)_{u=u_0} = \pm\sqrt{ff''},$$

ou, en substituant à f le rapport $-\frac{u_0}{f'}$ et en divisant par u_0,

$$\left(\frac{dv}{du}\right)_{u=u_0} = \pm\sqrt{-\frac{f''}{u_0 f'}}.$$

Cette équation, si l'on y considère u et v variables, est l'équation différentielle de la projection, sur le plan d'un parallèle, des lignes asymptotiques de la surface $w = f(u)$; nous pouvons donc conclure que dans la position que nous avons considérée *la polhodie touche une des lignes asymptotiques passant par le point de contact du corps et de la droite fixe.* Dans ce cas, la polhodie ne touche pas le parallèle du point M_0, $\frac{du}{dv}$ ne change pas de signe, et prend, pour $u = u_0$, le signe $+$ ou $-$ selon que la courbe touche l'une ou l'autre des deux asymptotiques, ce qui arrive, comme l'on voit facilement à l'aide de la formule

$$\frac{du}{dv} = \frac{s}{u + ww'}\frac{ds}{dv},$$

selon que le corps tend à la position où $u = u_0$ en partant de l'une ou de l'autre de deux positions symétriques par rapport au plan mené par O perpendiculairement à la droite fixe.

6. La propriété de la polhodie que nous venons de signaler pouvait être prévue en s'appuyant sur une remarque que nous ferons dans la suite. Nous verrons que la perpendiculaire menée du point de contact M à la droite fixe dans le plan de cette droite et du point O est la binormale de la polhodie; or, comme dans le cas étudié, cette droite est normale à la surface, on voit immédiatement que la polhodie doit toucher une des asymptotiques. Toutefois, ce raisonnement n'est pas général, car on voit qu'il présuppose que la polhodie ait, dans la position considérée, une tangente bien déterminée; lorsque cela n'arrive pas, le raisonnement tombe en défaut, et conduit à des résultats erronés. Cela arrive lorsque $u_0 = 0$, car alors, après avoir obtenu

$$u_0\left(\frac{dv}{du}\right)_{u=u_0} = \pm\sqrt{-\frac{u_0 f''}{f'}},$$

il n'est pas loisible de diviser par u_0, et en conclure

$$\left(\frac{dv}{du}\right)_{u=u_0} = \pm\sqrt{-\frac{f''}{u_0 f'}}.$$

Nous avons un exemple de ce fait dans le cas précédent où $u_0 = f'(u_0) = 0$. En effet, lorsque $f'' > 0$ la polhodie se confond, ainsi que nous venons de voir, avec une spirale logarithmique; le mouvement est donc réel, tandis qu'avec le raisonnement précédent on conclurait à l'impossibilité du mouvement, parce que le point considéré est un point elliptique de la surface où les lignes asymptotiques deviennent imaginaires. C'est pour cette raison que nous avons préféré la voie analytique qui est rigoureuse, et met bien en lumière ce cas d'exception.

Nous voyons ainsi que le mouvement est impossible dans la position considérée, lorsque dans cette position le point de contact est un point elliptique de la surface.

7. *Expression de la vitesse angulaire.* — Il est évident que la droite joignant le point fixe O au point de contact M est l'axe instantané de rotation du corps roulant : donc, si nous imaginons réalisée la surface conique que l'on obtient en joignant O à tous les points de la polhodie, le mouvement du corps pourra être obtenu en faisant rouler ce cône sur le plan du point O et de la droite d. Il s'agit donc de trouver la vitesse angulaire du cône roulant. Si nous indiquons par $d\varphi$ l'angle de deux plans tangents au cône infiniment voisins, et par ω la vitesse angulaire dont nous cherchons l'expression, nous avons

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Imaginons maintenant la polhodie comme une courbe tracée sur le cône que nous avons considéré; pendant que le cône roule, la polhodie roule aussi sur la droite fixe d. Donc, si nous supposons que l'on ait développé le cône sur le plan où il roule, la polhodie doit coïncider, après le développement, avec la droite α; cela suffit pour affirmer qu'elle est une ligne géodésique du cône. Il s'ensuit que la droite menée par M perpendiculairement au plan passant par O et par d, qui est la normale au cône, est aussi la binormale de la polhodie; si nous indiquons donc avec ε et η respectivement l'angle de contingence et l'angle de torsion, nous avons par la formule de Lancret

$$d\varphi^2 = \varepsilon^2 + \eta^2,$$

et, puisque

$$\varepsilon = \frac{ds}{\rho}, \qquad \eta = \frac{ds}{r},$$

(9) $$\omega = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}}\,\frac{ds}{dt}.$$

On peut encore simplifier cette formule en s'appuyant sur une propriété commune aux lignes géodésiques de toute surface conique. Ces lignes jouissent de la particularité d'avoir une des deux équations intrinsèques indépendante de la nature du cône, et par suite invariable. Cette équation ([1]) est

$$(10) \qquad sr = h\rho,$$

h étant la distance du sommet du cône au point de la courbe où elle coupe à angle droit la génératrice, c'est-à-dire la quantité que nous avons déjà appelée h. On peut avec l'équation (10) éliminer r de l'expression de ω, et l'on obtient

$$(11) \qquad \omega = \frac{\sqrt{h^2+s^2}}{h\rho}\,\frac{ds}{dt}.$$

Si l'on veut ω en fonction de l'angle $\theta = \widehat{M_0OM}$, il faut substituer à s, $h\tang\theta$ et il vient

$$\omega = \frac{h}{\rho\cos^3\theta}\,\frac{d\theta}{dt}.$$

8. Si λ, μ, ν sont les cosinus directeurs de la normale principale à la polhodie par rapport à trois axes orthogonaux issus du point O, on a

$$d\varphi^2 = d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2;$$

pour avoir donc les composantes p, q, r de la rotation, il faut connaître $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ dont les expressions sont données par les formules de Frenet

$$\begin{aligned} d\lambda &= -(a\varepsilon + \alpha\eta), \\ d\mu &= -(b\varepsilon + \beta\eta), \\ d\nu &= -(c\varepsilon + \gamma\eta), \end{aligned}$$

([1]) Cesàro, *Lezioni di Geometria intrinseca*, p. 144, Napoli; 1896.

a, b, c et α, β, γ étant respectivement les cosinus directeurs de la tangente et de la binormale. Il faudrait donc calculer les quantités qui figurent dans les seconds membres en fonction de s. Mais pour les applications dynamiques, si l'on veut étudier le mouvement dans le cas très fréquent où les forces agissant sur le corps dériveraient d'un potentiel U, il est inutile de connaître les expressions de p, q, r; mais il faut seulement trouver la force vive T, et l'on y arrive très facilement. Choisissons une terne d'axes fixes dans le corps et ayant l'origine au point O; soit Oz l'axe de révolution et Ox et Oy deux droites quelconques perpendiculaires à Oz et se coupant mutuellement à angle droit.

Si le corps est homogène et si on le considère tout entier, ou une portion comprise entre deux plans perpendiculaires à Oz, l'ellipsoïde d'inertie relatif au point O est de révolution et son équation est

$$A(x^2+y^2)+Bz^2=1,$$

la signification de A et B étant connue. Alors, u, v, w étant les coordonnées du point de contact, le moment d'inertie par rapport à l'axe instantané de rotation est

$$I=\frac{Au^2+Bw^2}{u^2+w^2}=\frac{Au^2+Bf^2(u)}{s^2+h^2}$$

et, puisque

$$2T=I\omega^2,$$

on a

$$2T=\frac{Au^2+Bf^2(u)}{h^2\rho^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \tag{12}$$

où il reste à calculer u et ρ en fonction de s, dans les cas particuliers.

9. *Surface engendrée par l'axe de révolution.* — Imaginons un cône circulaire C dont le sommet soit le

point fixe O et dont l'axe coïncide avec l'axe instantané de rotation. Supposons, en outre, que la surface de ce cône contienne l'axe du corps; on voit aussitôt que tous les cônes, tels que C, constituent une famille simplement infinie dont l'enveloppe est la surface engendrée dans le mouvement par l'axe de révolution du corps mobile.

On doit donc d'abord établir un terne d'axes fixes, puis obtenir l'équation générale des cônes C renfermant un seul paramètre, s par exemple, et ensuite éliminer s entre les équations

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{F}(x, y, z, s) = 0, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial s} = 0. \end{array}\right.$$

Établissons maintenant le système d'axes fixes dans l'espace. Le plan passant par O et par la droite fixe d soit le plan xy; la perpendiculaire et la parallèle menées à la droite d par le point O soient respectivement Ox et Oy. Ceci posé, les cosinus directeurs de l'axe instantané par rapport à ces axes sont évidemment

$$\frac{h}{\sqrt{s^2+h^2}}, \quad \frac{s}{\sqrt{s^2+h^2}}, \quad 0.$$

En outre, indiquant par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque P du cône C correspondant à la valeur s, les cosinus directeurs de OP sont

$$\frac{x}{r}, \quad \frac{y}{r}, \quad \frac{z}{r} \qquad (r = \sqrt{x^2+y^2+z^2});$$

le cosinus de l'angle de ces deux droites est donc

$$\frac{hx+sy}{r\sqrt{s^2+h^2}}.$$

Nous avons d'autre part une autre expression de cette même quantité, savoir

$$\frac{\varpi}{\sqrt{u^2+\varpi^2}} = \frac{\varpi}{\sqrt{s^2+h^2}}.$$

En égalant les deux expressions, on a l'équation générale des cônes C

$$(13) \qquad (hx+sy)^2 = \varpi^2 r^2,$$

où il faut imaginer ϖ exprimé en fonction de s.

L'équation de la surface cherchée résultera de l'élimination de s entre les équations

$$(14) \qquad \begin{cases} r^2\varpi^2 = (hx+sy)^2, \\ r^2\varpi \dfrac{d\varpi}{ds} = hxy + sy^2. \end{cases}$$

On ne peut effectuer cette élimination que dans les cas particuliers, à cause de ϖ et $\frac{d\varpi}{ds}$, qui sont des fonctions de s dont la forme dépend de la surface du corps mobile et de sa position par rapport à la droite fixe; si l'on connaît la fonction $\varpi = f(u)$ et la quantité h, les deux relations

$$\begin{cases} u = \varphi(\varpi), \\ s^2 = u^2 + \varpi^2 - h^2, \end{cases}$$

permettent d'exprimer ϖ et, par suite, $\frac{d\varpi}{ds}$, en fonction de s.

10. Il y a cependant un cas particulier important que nous allons montrer. Supposons que l'on ait toujours

$$(15) \qquad \varpi^2 - \varpi s \frac{d\varpi}{ds} = k^2,$$

k étant une constante, et voyons les cas dans lesquels cette relation peut se vérifier. On peut l'écrire

$$\frac{ds}{s} = \frac{w\,dw}{w^2 - k^2}.$$

Intégrant et indiquant par k_1 une seconde constante, nous avons

$$k_1 s = \sqrt{w^2 - k^2}.$$

Élevant au carré et substituant à s^2 sa valeur

$$s^2 = u^2 + w^2 - h^2,$$

nous obtenons

$$(15') \qquad k_1^2(u^2 + w^2 - h^2) = w^2 - k^2.$$

Cette équation peut s'écrire en coordonnées cartésiennes en posant

$$u^2 = x^2 + y^2, \qquad z^2 = w^2.$$

Elle devient alors

$$(15'') \qquad \frac{(k_1^2 - 1)}{h^2 k_1^2 - k^2} z^2 + \frac{k_1^2}{h^2 k_1^2 - k^2}(x^2 + y^2) = 1,$$

et comme les coefficients de z^2 et $(x^2 + y^2)$ sont indépendants, on voit que cette équation peut représenter toute quadrique de révolution ayant le centre au point fixe O, et, pour ces surfaces, vaut l'équation (15).

Cherchons maintenant la surface engendrée par l'axe de révolution. On peut remplacer le système (14) par l'autre

$$(16) \qquad \begin{cases} r^2\left(w^2 - ws\dfrac{dw}{ds}\right) = hx(hx + sy), \\[2ex] r^2 w\dfrac{dw}{ds} = hxy + sy^2. \end{cases}$$

La première de ces équations, dans notre cas, devient

$$k^2 r^2 = hx(hx + sy).$$

d'où l'on tire

$$(17) \qquad s = \frac{k^2 r^2 - h^2 x^2}{hxy}.$$

En outre, puisque

$$\frac{w\,dw}{ds} = \frac{w^2 - k^2}{s}, \qquad w^2 - k^2 = k_1^2 s^2,$$

on a

$$\frac{w\,dw}{ds} = k_1^2 s;$$

alors la seconde des équations (16) prend la forme

$$r^2 k_1^2 s = hxy + sy^2.$$

Introduisant l'expression (17) on obtient, après quelques réductions, l'équation

$$(18) \qquad k^2 k_1^2 r^2 - h^2 k_1^2 x^2 - k^2 y^2 = 0,$$

qui représente un cône du second degré. Donc :

Lorsqu'une quadrique de révolution est mobile autour de son centre fixe, et roule sans glisser sur une droite fixe, l'axe de révolution engendre un cône du second degré.

Les axes de ce cône coïncident évidemment avec les axes des coordonnées.

Le cône que nous avons trouvé peut quelquefois se réduire à un plan ou à un couple de plans; ce cas se présente, par exemple, lorsque $k = h$. En effet, l'équation trouvée devient alors

$$k_1^2(y^2 + z^2) = y^2$$

ou

$$(19) \qquad z = \pm y\sqrt{\frac{1}{k_1^2} - 1},$$

et représente, comme l'on voit, deux plans se coupant suivant l'axe Ox. Quelle est la surface correspondante à ce cas? L'équation (15') devient, dans ce cas,

$$u^2 = (w^2 - h^2)\left(\frac{1}{k_1^2} - 1\right), \tag{20}$$

Si $k_1 < 1$, l'équation (19) représente deux plans réels et l'équation (20) *un hyperboloïde à deux nappes dont le demi-axe réel est h.*

Si $k_1 > 1$, nous avons un ellipsoïde de révolution allongé dont le demi-axe de révolution est h et le demi-axe équatorial est $h\sqrt{1 - \frac{1}{k_1^2}}$; dans ce cas nous savons, *a priori*, que le mouvement est impossible; cependant, l'équation (19) confirme ce fait, car elle représente, pour $k_1 > 1$, deux plans imaginaires.