RAOUL BRICARD

Deuxième concours de « Nouvelles annales » pour 1898

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 197-217

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__197_0>

[M²41]

DEUXIÈME CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1898;

Par M. Raoul BRICARD (1).

I. *On dit que six points d'une conique forment trois couples en involution (ou sont en involution) quand les trois droites joignant les points de chaque couple sont concourantes.*

Établir que six points d'une conique peuvent être en involution de 1, 2, 3, 4 *ou* 6 *manières différentes et définir géométriquement, dans chaque cas, les positions correspondantes des six points.*

II. *On nomme* tétraédroïde *la transformée homographique générale de la surface de l'onde; en coordonnées homogènes, une telle surface est définie paramétriquement par les relations*

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{x}{t} &= \frac{\sigma_1 u}{\sigma u}\,\frac{\overline{\sigma_1 v}}{\overline{\sigma v}},\\ \frac{y}{t} &= \frac{\sigma_2 u}{\sigma u}\,\frac{\overline{\sigma_2 v}}{\overline{\sigma v}},\\ \frac{z}{t} &= \frac{\sigma_3 u}{\sigma u}\,\frac{\overline{\sigma_3 v}}{\overline{\sigma v}}, \end{aligned}\right.$$

σu, $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ *étant les fonctions classiques de Weierstrass formées avec les périodes* $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$; $\overline{\sigma v}$, $\overline{\sigma_1 v}$, $\overline{\sigma_2 v}$, $\overline{\sigma_3 v}$ (2) *étant les fonctions analogues formées avec les périodes* $2\varpi_1$, $2\varpi_2$, $2\varpi_3$.

(1) Mémoire ayant obtenu le prix.

(2) On désignera par e_1, e_2, e_3 les valeurs de $p\omega_1$, $p\omega_2$, $p\omega_3$, pu étant la fonction classique aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$; par ε_1, ε_2, ε_3 les va-

Vérifier que la surface (1) *a seize points doubles, situés six à six dans seize plans* (*plans singuliers*); *que par un point double passent six plans singuliers; que les six points doubles,* P_i, *situés dans un même plan singulier sont en involution; que les seize points doubles sont quatre par quatre sur les faces d'un tétraèdre et que les seize plans singuliers passent quatre par quatre par les sommets du même tétraèdre.*

III. *Montrer que les périodes* (*ou les modules*) *des fonctions elliptiques peuvent être choisies de telle sorte que les six points doubles* P_i (*situés dans un même plan singulier*) *soient en involution de deux manières différentes. Vérifier que la surface* (1) *est alors deux fois tétraédroïde, c'est-à-dire que les seize points doubles sont, quatre par quatre, sur les faces d'un nouveau tétraèdre. Équation correspondante de la surface.*

IV. *Montrer que les six points doubles* P_i *peuvent être en involution de trois manières différentes; vérifier que la surface* (1) *est alors trois fois tétraédroïde. Étudier les positions relatives des trois tétraèdres correspondants.*

Former la relation qui existe en ce cas entre les modules des fonctions elliptiques introduites $\left(\right.$*on prendra pour modules* $\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$ *et* $\left.\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}\right)$, *vérifier qu'elle coïncide avec l'équation modulaire pour* $n = 3$. *Conséquence pour les périodes. Équation correspondante de la surface:*

V. *Montrer que les six points doubles* P_i *peuvent être en involution de quatre manières différentes et*

---

leurs de $\overline{p\varpi_1}$, $\overline{p\varpi_2}$, $\overline{p\varpi_3}$, $\overline{p}v$ étant la fonction analogue aux périodes $2\varpi_1$, $2\varpi_2$, $2\varpi_3$.

que la surface est alors quatre fois tétraédroïde. Déterminer en ce cas les périodes et les modules des fonctions elliptiques. Équation de la surface; étudier les positions relatives des seize points doubles.

VI. *Montrer que les six points* P_i *peuvent être en involution de six manières différentes et que la surface est alors six fois tétraédroïde. Périodes et modules des fonctions elliptiques; équation de la surface; positions relatives des seize points doubles.*

Nota. — *On ne devra pas s'appuyer sur la théorie des fonctions ou des intégrales hyperelliptiques ni sur les propriétés de la surface de Kummer.*

I.

1° Considérons, sur une conique C, six points que nous désignerons par a, b, c, a_t, b_t, c_t (cette notation étant celle que nous retrouverons dans l'étude de la surface tétraédroïde). Supposons-les en involution, de telle manière que les trois droites

$$aa_t, \quad bb_t, \quad cc_t$$

soient concourantes. Nous désignerons par ω_1 leur point de concours (*centre de l'involution*).

Il peut arriver que ces six points soient en involution d'une seconde manière, *de sorte qu'un des couples précédents soit conservé.* Par exemple, les droites

$$aa_t, \quad bc_t, \quad cb_t$$

sont concourantes en un point ω_2.

On se rendra facilement compte du fait suivant : *les points* ω_1 *et* ω_2 *sont conjugués par rapport à* C. Réciproquement, on constituera, de la manière suivante, le système le plus général de six points de la conique C qui soient en involution de deux manières différentes : on choisit deux points ω_1 et ω_2, conjugués par rapport à C. Les deux points a et a_t sont les points d'intersection de C avec la droite $\omega_1 \omega_2$. Par le point ω_1 on mène une sécante arbitraire recontrant C aux points b et b_t. Les deux droites $\omega_2 b$ et $\omega_2 b_t$ déterminent les points c_t et c sur la conique C.

2° Supposons maintenant que les six points soient en involution de deux manières différentes, et *de sorte que l'on ne rencontre pas deux fois le même couple de points*. Par exemple,

Les droites aa_t, bb_t, cc_t concourent en ω_1,
Les droites ab_t, bc_t, ca_t concourent en ω_2.

Je dis que les six points sont en involution d'une troisième manière, de telle sorte que les droites

$$ac_t, \quad ba_t, \quad cb_t$$

sont encore concourantes.

Faisons en effet une transformation homographique de la figure telle que les points ω_1 et ω_2 soient rejetés à l'infini et que la conique C devienne un cercle. On se rend immédiatement compte que les deux triangles abc, $a_t b_t c_t$ sont équilatéraux et inversement orientés. Il est alors évident que les droites ac_t, ba_t, cb_t sont parallèles, ce qui établit le théorème.

La démonstration précédente permet d'ajouter ce qui suit : *Si l'on appelle* ω_3 *le troisième centre d'involution, les trois points* ω_1, ω_2, ω_3 *sont en ligne droite; de plus, le segment limité par les points d'intersection de* C *et de la droite* $\omega_1 \omega_2 \omega_3$ *est divisé équianharmoniquement par deux quelconques des trois points* ω_1, ω_2, ω_3. En effet, dans la figure transformée, les trois points ω_1, ω_2, ω_3 sont rejetés à l'infini dans des directions inclinées à 120° les unes sur les autres.

3° Les six points étant en involution des trois manières que nous avons indiquées peuvent encore l'être d'une quatrième, de telle sorte que les droites

$$aa_t, \quad bc_t, \quad cb_t$$

sont concourantes en un point ω_4.

En raisonnant comme précédemment, on verra que *la figure est la transformée homographique de celle formée par six points situés aux sommets d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle* (les droites aa_t, bc_t, cb_t sont des diamètres). Les points ω_1, ω_2, ω_3 sont situés comme précédemment, et le point ω_4 est le pôle de la droite $\omega_1\omega_2\omega_3$.

4° En dernier lieu, les points étant déjà de trois manières en involution (groupés comme il est indiqué dans le 2°), ils peuvent l'être d'une quatrième, de sorte que les droites

$$aa_t, \quad bc_t, \quad b_tc_t$$

concourent en un même point ω'_1.

En appliquant le théorème du 2°, on voit que nos six points sont encore en involution de deux nouvelles manières :

Les droites bc_t, ac, b_ta_t concourent en un point ω'_2 ;
Les droites cb_t, ab, c_ta_t concourent en un point ω'_3.

Les six centres d'involution sont aux sommets d'un quadrilatère complet : sur chaque côté de ce quadrilatère on rencontre les trois indices; les points ω_1 et ω'_1, ω_2 et ω'_2, ω_3 et ω'_3 forment deux à deux des couples de sommets opposés; ces points sont aussi conjugués deux à deux par rapport à la conique.

La figure formée dans ce dernier cas ne peut être réelle. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que tous les cas possibles ont été passés en revue et que, à la notation près, les dispositions indiquées sont chacune les plus générales de leur espèce.

II.

Nous emploierons la notation connue

$$\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u} = \sigma_{\alpha 0} u.$$

Les relations qui définissent la tétraédroïde deviennent ainsi

$$\frac{x}{t} = \sigma_{10} u \, \overline{\sigma_{10} v},$$

$$\frac{y}{t} = \sigma_{20} u \, \overline{\sigma_{20} v},$$

$$\frac{z}{t} = \sigma_{30} u \, \overline{\sigma_{30} v}.$$

Nous obtiendrons les points doubles en cherchant les points où le plan tangent est indéterminé ; or au point (u, v) le plan tangent a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ \sigma_{10} u \, \overline{\sigma_{10} v} & \sigma_{20} u \, \overline{\sigma_{20} v} & \sigma_{30} u \, \overline{\sigma_{30} v} & 1 \\ \sigma'_{10} u \, \overline{\sigma_{10} v} & \sigma'_{20} u \, \overline{\sigma_{20} v} & \sigma'_{30} u \, \overline{\sigma_{30} v} & 0 \\ \sigma_{10} u \, \overline{\sigma'_{10} v} & \sigma_{20} u \, \overline{\sigma'_{20} v} & \sigma_{30} u \, \overline{\sigma'_{30} v} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On a

$$\sigma'_{\alpha 0} u = \frac{d}{du} \sqrt{pu - e_\alpha}$$
$$= \frac{p' u}{2\sqrt{pu - e_\alpha}} = \sqrt{pu - e_\beta}\,\sqrt{pu - e_\gamma} = \sigma_{\beta 0} u \, \sigma_{\gamma 0} u.$$

Dans le déterminant que forme le premier membre de l'équation du plan tangent, on peut donc écrire les deux dernières lignes ainsi :

$$\begin{vmatrix} \sigma_{20} u \, \sigma_{30} u \, \overline{\sigma_{10} v} & \sigma_{30} u \, \sigma_{10} u \, \overline{\sigma_{20} v} & \sigma_{10} u \, \sigma_{20} u \, \overline{\sigma_{30} v} & 0 \\ \sigma_{10} u \, \overline{\sigma_{20} v} \, \overline{\sigma_{30} v} & \sigma_{20} u \, \overline{\sigma_{30} v} \, \overline{\sigma_{10} v} & \sigma_{30} u \, \overline{\sigma_{10} v} \, \overline{\sigma_{20} v} & 0 \end{vmatrix}.$$

Pour que le plan tangent soit indéterminé, il faut et il suffit que tous les déterminants du tableau précédent soient nuls. On trouve aisément tous les systèmes de solutions, qui sont les suivants :

$$\sigma_{10}\,u = \overline{\sigma_{10}\,v} = 0, \qquad \sigma_{20}\,u = \overline{\sigma_{20}\,v} = 0, \qquad \sigma_{30}\,u = \overline{\sigma_{30}\,v} = 0,$$
$$pu = pv = \infty.$$

A chaque système de solutions correspondent quatre points doubles. Il y en a donc seize en tout, et l'on formera facilement le Tableau de leurs coordonnées.

En posant

$$\alpha = \sqrt{e_2 - e_3}\,\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_3},$$
$$\beta = \sqrt{e_3 - e_1}\,\sqrt{\varepsilon_3 - \varepsilon_1},$$
$$\gamma = \sqrt{e_1 - e_2}\,\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2},$$

ce Tableau est le suivant :

Tableau des points doubles de la tétraédroïde.

Points.	x.	y.	z.	t.
a	0	$-\gamma$	β	1
a_y	0	γ	β	1
a_z	0	$-\gamma$	$-\beta$	1
a_t	0	γ	$-\beta$	1
..	....	....	....	.
b	γ	0	$-\alpha$	1
b_z	γ	0	α	1
b_x	$-\gamma$	0	$-\alpha$	1
b_t	$-\gamma$	0	α	1
..	....	....	....	.
c	$-\beta$	α	0	1
c_x	β	α	0	1
c_y	$-\beta$	$-\alpha$	0	1
c_t	β	$-\alpha$	0	1
..	....	....	....	.
d	1	1	1	0
d_x	-1	1	1	0
d_y	1	-1	1	0
d_z	1	1	-1	0

Étudions la disposition de ces points.

On voit qu'ils sont quatre par quatre sur les faces du tétraèdre de référence ABCD. Les quatre points situés dans une même face sont deux à deux en ligne droite avec les sommets de cette face. Ainsi, dans le plan ABC,

Les droites	dd_x et $d_y d_z$	passent par le sommet	A,
»	dd_y et $d_z d_x$	»	B,
»	dd_z et $d_x d_y$	»	C.

On voit la raison de la notation adoptée.

Chaque sommet appartenant à trois faces est situé sur six droites dont chacune contient deux points doubles. Voici, par exemple, les six droites passant par le sommet D (nous écrivons leurs équations en regard) :

$\mathrm{D}a\ a_t$,	$x = 0$,	$\beta y + \gamma z = 0$,
$\mathrm{D}a_y a_z$,	$x = 0$,	$\beta y - \gamma z = 0$,
$\mathrm{D}b\ b_t$,	$y = 0$,	$\gamma z + \alpha x = 0$,
$\mathrm{D}b_z b_x$,	$y = 0$,	$\gamma z - \alpha x = 0$,
$\mathrm{D}c\ c_t$,	$z = 0$,	$\alpha x + \beta y = 0$,
$\mathrm{D}c_x c_y$,	$z = 0$,	$\alpha x - \beta y = 0$.

On voit aisément que ces six droites sont les intersections mutuelles des quatre plans

$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$	(contenant	$a\ a_t b\ b_t c\ c_t$),
$-\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$	»	$a\ a_t b_z b_x c_x c_y$),
$\alpha x - \beta y + \gamma z = 0$	»	$a_y a_z b\ b_t c_x c_y$).
$\alpha x + \beta y - \gamma z = 0$	»	$a_y a_z b_z b_x c\ c_t$).

Ainsi les points doubles situés deux à deux sur des droites concourant en un sommet du tétraèdre sont situés six par six dans quatre plans. On trouvera, en tout, seize plans singuliers analogues dont voici le Tableau :

$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$	contenant les points	$a\ a_t\ b\ b_t\ c\ c_t$,
$\alpha x + \beta y - \gamma z = 0$	»	$a_y a_z b_z b_x c\ c_t$,
$\alpha x - \beta y + \gamma z = 0$	»	$a_y a_z b\ b_t c_x c_y$,
$-\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$	»	$a\ a_t b_z b_x c_x c_y$,
$y + z + \alpha t = 0$	»	$b\ b_x c_y c_t d_y d_z$,
$y + z - \alpha t = 0$	»	$b_z b_t c\ c_x d_y d_z$,
$y - z + \alpha t = 0$	»	$b_z b_t c_y c_t d\ d_x$,
$-y + z + \alpha t = 0$	»	$b\ b_x c\ c_x d\ d_x$,
$z + x + \beta t = 0$	»	$c\ c_y a_z a_t d_z d_x$,
$z + x - \beta t = 0$	»	$c_x c_t a\ a_y d_z d_x$,
$z - x + \beta t = 0$	»	$c_x c_t a_z a_t d\ d_y$,
$-z + x + \beta t = 0$	»	$c\ c_y a\ a_y d\ d_y$,
$x + y + \gamma t = 0$	»	$a\ a_z b_x b_t d_x d_y$,
$x + y - \gamma t = 0$	»	$a_y a_t b\ b_z d_x d_y$,
$x - y + \gamma t = 0$	»	$a_y a_t b_x b_t d\ d_z$,
$-x + y + \gamma t = 0$	»	$a\ a_z b\ b_z d\ d_z$.

On voit que chaque point double appartient à six plans singuliers. En outre, la droite joignant deux points doubles quelconques est l'intersection de deux plans singuliers.

Considérons enfin les points doubles situés dans un même plan singulier, par exemple les points a, a_t, b, b_t, c, c_t. Les droites aa_t, bb_t, cc_t sont concourantes au point D. Soit L la trace du plan $(aa_tbb_tcc_t)$ sur le plan $t = 0$. On voit immédiatement que les points a, a_t divisent harmoniquement le segment de la droite $\mathrm{D}aa_t$ compris entre le point D et le point d'intersection de cette droite avec L. On a un fait semblable relativement aux points b, b_t et aux points c, c_t.

Cela posé, on a le théorème suivant, dont la démonstration est des plus simples : *Étant données une droite* L *et trois droites concourantes dont chacune porte deux* *points qui divisent harmoniquement le segment limité par le point de concours et la droite* L, *les six points ainsi déterminés appartiennent à une même conique, sur laquelle ils sont évidemment en involution.*

Les points a, a_t, b, b_t, c, c_t sont donc en involution sur une conique, et nous avons établi toutes les propositions énoncées dans le § II.

III.

Considérons encore les six points doubles a, a_t, b, b_t, c, c_t, situés dans un même plan singulier. Ces points seront en involution d'une seconde manière (§ I), si les droites

$$aa_t,\quad bc_t,\quad cb_t$$

sont concourantes.

Il suffit d'exprimer pour cela que les plans Aaa_t, Abc_t, Acb_t ont une droite commune. Or ces plans ont pour équations respectives

$$\begin{array}{ll} Aaa_t, & \beta y + \gamma z = 0, \\ Abc_t, & y - z + \alpha t = 0, \\ Acb_t, & y - z - \alpha t = 0. \end{array}$$

On trouve la condition

$$(1)\qquad \beta = \gamma.$$

On voit de plus que le nouveau centre d'involution est dans le plan $t = 0$, c'est-à-dire sur l'arête BC. Ce résultat pouvait être prévu, puisque ce nouveau centre d'involution doit être conjugué du premier D, par rapport à la conique $(aa_t bb_t cc_t)$ (§ I).

Cette condition étant satisfaite, on vérifie que les seize points doubles sont répartis quatre par quatre, sur les faces d'un nouveau tétraèdre T′. Nous donnons cidessous les équations des faces de ce nouveau tétraèdre, et nous mettons en regard les points contenus dans ces faces :

$$\begin{array}{ll} y + z = 0, & a, \ a_t, \ d_y, \ d_z, \\ y - z = 0, & a_y, \ a_z, \ d, \ d_x, \\ x + \beta t = 0, & b_x, \ b_t, \ c, \ c_y, \\ x - \beta t = 0, & b, \ b_z, \ c_x, \ c_t. \end{array}$$

Deux des sommets du nouveau tétraèdre sont situés sur l'arête BC; les deux autres, sur l'arête AD; *sur chacune de ces arêtes on a une division harmonique.*

Relation entre les modules et les périodes et équation de la surface. — Pour plus de simplicité, nous prendrons comme modules les quantités

$$K = \frac{e_2 - e_1}{e_3 - e_1}, \qquad K' = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1} \ (^1).$$

La condition (1) s'écrit alors

$$KK' = 1.$$

Les fonctions pu et $\overline{pv}$ introduites ont même invariant absolu et par suite même rapport de périodes. Comme les quantités e_1, e_2, e_3 d'une part, ε_1, ε_2, ε_3 de l'autre, n'interviennent évidemment dans l'équation de la surface que par leurs rapports mutuels, on peut poser sans inconvénient

$$\begin{aligned} e_1 = \varepsilon_1 &= \quad K + 1, \\ e_2 = \varepsilon_3 &= -2K + 1, \\ e_3 = \varepsilon_2 &= \quad K - 2. \end{aligned}$$

---

(1) Cela n'est pas conforme aux prescriptions de l'énoncé, et je prie l'auteur de la question de vouloir bien m'en excuser. J'aurais dû grouper les points de manière à être conduit à la condition $\alpha = \beta$, ce qui m'aurait amené à prendre pour modules $\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$ et $\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}$.

On remarquera en outre que, pour simplifier les formules, j'ai écrit K au lieu de K^2, comme on le fait d'habitude.

On a bien ainsi

$$e_1 + e_2 + e_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0,$$
$$\frac{e_2 - e_1}{e_3 - e_1} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} = \mathrm{K}.$$

Les relations qui définissent la tétraédroïde deviennent alors

$$\frac{x^2}{t^2} = (pu - \mathrm{K} - 1)(\overline{pv} - \mathrm{K} - 1),$$
$$\frac{y^2}{t^2} = (pu + 2\mathrm{K} - 1)(\overline{pv} - \mathrm{K} + 2),$$
$$\frac{z^2}{t^2} = (pu - \mathrm{K} + 2)(\overline{pv} + 2\mathrm{K} - 1),$$

ou, plus simplement,

$$\frac{x^2}{t^2} = \lambda\mu,$$
$$\frac{y^2}{t^2} = (\lambda + \mathrm{K})(\mu + 1),$$
$$\frac{z^2}{t^2} = (\lambda + 1)(\mu + \mathrm{K}),$$

en posant

$$pu - \mathrm{K} - 1 = 3\lambda, \qquad \overline{pv} - \mathrm{K} - 1 = 3\mu,$$

et en supprimant le facteur 9 dans chaque second membre, ce qui est une simple transformation homographique.

Un calcul facile donne l'équation de la surface

$$\begin{aligned}&[(1-\mathrm{K})x^2 - y^2 + \mathrm{K}z^2 + (\mathrm{K} - \mathrm{K}^2)t^2]\\ &\quad \times [(1-\mathrm{K})x^2 + \mathrm{K}y^2 - z^2 + (\mathrm{K} - \mathrm{K}^2)t^2] - (\mathrm{K}^2 - 1)^2 x^2 t^2 = 0\end{aligned}$$

IV.

Les points doubles a, a_t, b, b_t, c, c_t seront en involution de trois manières différentes si les droites ab_t, bc_t, ca_t sont concourantes (§ I). On trouve aisément la condition

$$(2) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha - 2\alpha\beta = 0.$$

Cette condition peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} 0 & \gamma & \beta & 1 \\ \gamma & 0 & \alpha & 1 \\ \beta & \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui exprime que les quatre points a_y, b_z, c_x, d sont dans un même plan.

On peut écrire de huit manières la relation précédente, en changeant dans le déterminant les signes de certains éléments, de telle manière que la relation ne soit pas altérée. On a par exemple

$$\begin{vmatrix} 0 & -\gamma & -\beta & 1 \\ \gamma & 0 & -\alpha & 1 \\ \beta & -\alpha & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui exprime que les quatre points $a_z b c_t d_x$ sont dans un même plan. En procédant ainsi, on reconnaît que les points doubles sont répartis quatre par quatre sur les faces de deux nouveaux tétraèdres. Cette répartition est indiquée dans le Tableau suivant :

$$\text{Deuxième tétraèdre : } T_2 \begin{cases} a\ b_t\ c_y\, d_z, \\ a_z b\ \ c_t\ d_x, \\ a_t\ b_x c\ \ d_y, \\ a_y b_z\, c_x d, \end{cases}$$

$$\text{Troisième tétraèdre : } T_3 \begin{cases} a_t\ b\ \ c_x d_z, \\ a_y b_t\ c\ \ d_x, \\ a\ \ b_z\, c_t\ d_y, \\ a_z\, b_x c_y\, d. \end{cases}$$

Voici maintenant quelques mots sur la disposition des trois tétraèdres : dans chacun des quatre plans singuliers qui contiennent le sommet D du premier tétraèdre, les six points doubles sont en involution de trois manières différentes et l'on sait (§ I) que les trois centres d'involution sont en ligne droite. On voit donc que les sommets des deux nouveaux tétraèdres sont deux à deux en ligne droite avec le point D. Cette remarque s'étend aux autres sommets. En outre, il est évident que chacun des tétraèdres jouit des mêmes propriétés par rapport aux deux autres. Ainsi *les trois tétraèdres sont tels que la droite joignant deux sommets quelconques de deux d'entre eux passe par un sommet du troisième.* On reconnaît le *système desmique* de trois tétraèdres, étudié par M Cyparissos Stephanos ([1]). Pour les propriétés de cette configuration remarquable, nous renverrons au Mémoire cité en Note, ou à la *Géométrie réglée* de M. Kœnigs (Chap. V).

Relation entre les fonctions elliptiques introduites. — La relation (2) peut s'écrire

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\sqrt[4]{e_2-e_3}\sqrt[4]{\varepsilon_2-\varepsilon_3} \\ &\quad+\sqrt[4]{e_3-e_1}\sqrt[4]{\varepsilon_3-\varepsilon_1}+\sqrt[4]{e_1-e_2}\sqrt[4]{\varepsilon_1-\varepsilon_2}=0. \end{aligned}\right.$$

Or nous allons montrer que cette relation a lieu entre les éléments $p\omega_1$, $p\omega_2$, $p\omega_3$ et $\overline{p\varpi_1}$, $\overline{p\varpi_2}$, $\overline{p\varpi_3}$, si l'on a entre les périodes la relation

$$\varpi_1=\frac{\omega_1}{3},\qquad \varpi_2=\omega_2.$$

Il résulte en effet d'une formule donnée par M. Jor-

([1]) *Bull. des Sc math.*, t. XIV.

dan dans son *Traité d'Analyse* (1) que l'on a alors

$$\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha = (e_\beta - e_\alpha)^3 \left[\frac{2\left(p\frac{2\omega_1}{3} - e_\gamma\right)}{p'\frac{2\omega_1}{3}} \right]^4,$$

ce qui donne successivement

$$\sqrt[4]{e_2 - e_3}\,\sqrt[4]{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} = (e_2 - e_3)\frac{2\left(p\frac{2\omega_1}{3} - e_1\right)}{p'\frac{2\omega_1}{3}},$$

$$\sqrt[4]{e_3 - e_1}\,\sqrt[4]{\varepsilon_3 - \varepsilon_1} = (e_3 - e_1)\frac{2\left(p\frac{2\omega_1}{3} - e_2\right)}{p'\frac{2\omega_1}{3}},$$

$$\sqrt[4]{e_1 - e_2}\,\sqrt[4]{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = (e_1 - e_2)\frac{2\left(p\frac{2\omega_1}{3} - e_3\right)}{p'\frac{2\omega_1}{3}};$$

on tire aisément de là la relation (3).

La relation entre les modules des fonctions elliptiques introduites coïncide donc avec l'équation modulaire pour $n = 3$. Cette relation est

$$(4) \qquad \sqrt[4]{KK'} + \sqrt[4]{(K-1)(K'-1)} + 1 = 0;$$

on la rendra facilement rationnelle (cette forme est d'ailleurs classique).

Dans une Note insérée au *Bulletin de la Soc. math. de France* (2), M. G. Humbert a montré que la relation (4) est unicursale, et que l'on y satisfait en posant

$$K' = \frac{(\lambda - 1)^3(3\lambda + 1)}{(\lambda + 1)^3(3\lambda - 1)},$$

$$K = \frac{(\lambda - 1)(3\lambda + 1)^3}{(\lambda + 1)(3\lambda - 1)^3}.$$

(1) Tome II, 2e édit., Chap. VI, p. 519, formule (23).

(2) Tome XXVI, p. 235.

Quant à l'équation de la surface, on l'obtient par l'élimination de λ et μ entre les équations

$$\frac{x^2}{t^2} = \lambda\mu.$$

$$\frac{y^2}{t^2} = (\lambda + \mathrm{K})(\mu + \mathrm{K}'),$$

$$\frac{z^2}{t^2} = (\lambda + 1)(\mu + 1)$$

(même calcul qu'au § III), ce qui donne

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} [(\mathrm{K} - 1)x^2 + y^2 - \mathrm{K}z^2 + (\mathrm{K} - \mathrm{KK}')t^2] \\ \quad \times [(\mathrm{K}' - 1)x^2 + y^2 - \mathrm{K}'z^2 + (\mathrm{K}' - \mathrm{KK}')t^2] + (\mathrm{K} - \mathrm{K}')^2x^2t^2 = 0, \end{array} \right.$$

où l'on peut remplacer K et K′ par leurs valeurs données plus haut.

V.

Les points doubles seront en involution de quatre manières différentes, si les particularités du § III et celles du § IV se présentent en même temps. On doit donc avoir simultanément

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha - 2\alpha\beta = 0.$$

$$\beta = \gamma,$$

d'où l'on tire

$$\alpha = 4\beta = 4\gamma.$$

Les modules sont donnés par les équations

$$(6)\qquad \mathrm{K}^2 + 14\mathrm{K} + 1 = 0, \qquad \mathrm{K}' = \frac{1}{\mathrm{K}}.$$

Les deux fonctions pu et $\overline{pv}$ sont reliées par une transformation de degré 3, et de plus elles ont même invariant absolu. Il en résulte que *chacune d'elles admet une multiplication complexe.*

Pour déterminer le discriminant qui correspond à cette multiplication complexe, on peut procéder ainsi : Nous calculerons tout d'abord $p\frac{2\omega_1}{3}$ à l'aide des formules déjà employées

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = (e_2 - e_1)^3 \left[\frac{2\left(p\frac{2\omega_1}{3} - e_3\right)}{p'\frac{2\omega_1}{3}} \right]^4,$$

$$\varepsilon_3 - \varepsilon_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d'où l'on tire, par division,

$$(7) \qquad \left(\frac{p\frac{2\omega_1}{3} - e_3}{p\frac{2\omega_1}{3} - e_2} \right)^4 = \frac{1}{K^4}.$$

Cette relation donne quatre valeurs possibles pour $p\frac{2\omega_1}{3}$. *Elles sont toutes de la forme*

$$p\frac{2\omega_1}{3} = \mu + \nu\sqrt{3},$$

μ *et* ν *étant des nombres rationnels, réels ou complexes.* D'autre part, on a la formule connue

$$\frac{1}{20}(m^4 - 1)g_2 = \frac{1}{2}\sum_1^2 p''\frac{2\omega_1}{3} = p''\frac{2\omega_1}{3} = p^2\frac{2\omega_1}{3} - \frac{1}{2}g_2,$$

m étant le multiplicateur complexe, qui est de l'une des formes

$$x + yi\sqrt{D}, \qquad \frac{1}{2}(x + yi\sqrt{D}),$$

D étant le discriminant cherché, x et y des nombres entiers.

On peut écrire l'égalité précédente

$$m^4 = -9 + \frac{p^2\frac{2\omega_1}{3}}{g_2}.$$

Le second membre est de la forme $\mu' + \nu' \sqrt{3}$, le premier membre de la forme $\mu_1 + \nu_1 \sqrt{D}$. On a donc nécessairement

$$D = 3.$$

Ainsi le rapport τ des périodes de la fonction pu satisfait à une relation à coefficients entiers

$$A\tau^2 + 2B\tau + C = 0,$$

de discriminant égal à 3.

On sait que les équations quadratiques de cette nature appartiennent à deux classes différentes, pour lesquelles les formes réduites sont respectivement

$$\tau^2 + \tau + 1 = 0,$$
$$\tau^2 + 3 = 0.$$

La première relation est certainement à rejeter, car si elle était satisfaite, la fonction pu serait équianharmonique, comme il est bien connu; et cela n'a pas lieu, K n'étant pas égal à une racine cubique de l'unité, changée de signe.

En résumé, les fonctions elliptiques introduites ont même invariant absolu et, par suite, même rapport de périodes. De plus, deux périodes primitives de l'une, convenablement choisies, satisfont à la relation

$$\omega_1^2 + 3\omega_2^2 = 0.$$

Disposition des points doubles. — On aura le Tableau de leurs coordonnées en faisant, dans le tableau du § 11,

$$\beta = \gamma = 1, \qquad \alpha = 4.$$

Ces points peuvent être répartis quatre par quatre sur les faces de quatre tétraèdres, savoir : le tétraèdre de référence T_1, les deux tétraèdres T_2 et T_3 du § IV, et le tétraèdre T' du § II.

Le tétraèdre T' a, comme on l'a vu, deux arêtes opposées communes avec le tétraèdre T_1 ; il est évidemment dans la même situation, relativement à T_2 et à T_3 ; par conséquent, *chaque arête de l'un des tétraèdres desmiques* T_1, T_2, T_3 *rencontre deux arêtes opposées de chacun des deux centres.*

Il est à noter que cet assemblage remarquable de quatre tétraèdres peut être réel.

Quant à l'équation de la surface, on la formera en faisant

$$K = 7 \pm 4\sqrt{3},$$

dans l'équation donnée à la fin du § IV.

VI.

Les points doubles situés dans un même plan singulier seront en involution sextuple, si la disposition du § IV est réalisée, et si de plus les trois droites aa_t, bc_t, cb_t sont concourantes (§ I). On trouve la condition

$$\beta = -\gamma,$$

qui doit être jointe à la relation (2).

On tire de là

$$\alpha = 2\beta i = -2\gamma i$$

et

$$(8) \qquad K^2 - 6K + 1 = 0.$$

Comme précédemment, la fonction pu admet une multiplication complexe. En répétant les raisonnements indiqués précédemment, on trouve que *le discriminant de la multiplication complexe est ici égal à* 2 ; la relation entre les périodes est

$$\omega_1^2 + 2\omega_2^2 = 0,$$

ou une relation équivalente. (Il n'y a qu'une seule classe de formes quadratiques, de discriminant égal à 2.)

Disposition des points doubles. — On aura les coordonnées des points doubles en faisant dans le Tableau :

$$\alpha = 2, \qquad \beta = i, \qquad \gamma = -i.$$

Ces points sont quatre par quatre sur les faces des tétraèdres T_1, T_2, T_3 et sur les faces de trois nouveaux tétraèdres, qui, on le vérifiera sans peine, sont les suivants :

$$T'_1 \begin{cases} a & a_t & d & d_x, \\ a_y & a_z & d_y & d_z, \\ b_z & b_t & c_x & c_t, \\ b & b_z & c & c_y, \end{cases} \qquad T'_2 \begin{cases} a_y & b & c_t & d, \\ a_t & b_t & c_y & d_y, \\ a & b_x & c & d_z, \\ a_z & b_z & c_x & d_x, \end{cases} \qquad T'_3 \begin{cases} a_z & b_t & c & d, \\ a_y & b_x & c_y & d_x, \\ a & b & c_x & d_y, \\ a_t & b_z & c_t & d_z. \end{cases}$$

Les tétraèdres T_1, T_2, T_3 forment un système desmique, et il en est de même pour trois tétraèdres n'ayant pas d'indice commun, en exceptant le groupement T'_1, T'_2, T'_3. *Il y a donc en tout quatre systèmes desmiques dans la figure.* Enfin, dans chacun des couples

$$(T_1, T'_1), \quad (T_2, T'_2), \quad (T_3, T'_3),$$

les deux tétraèdres ont en commun un système d'arêtes opposées.

NOTE.

Quand la surface est trois fois tétraédroïde, les points doubles peuvent, comme nous l'avons montré, être répartis quatre par quatre sur les faces de trois tétraèdres qui forment un système desmique. D'après la définition même, les sommets de ces trois tétraèdres se répartissent trois par trois sur seize droites. On trouve aisément les sommets correspondants de la manière suivante : Désignons par 1, 2, 3, 4, 1′, ..., 4′, 1″, ..., 4″ les faces de ces tétraèdres, d'après le Tableau

$$T_1\left\{\begin{array}{ll} 1, & (a\,a_y a_z\,a_t),\\ 2, & (b\,b_z\,b_x\,b_t),\\ 3, & (c\,c_x c_y\,c_t),\\ 4, & (d\,d_x d_y d_z),\end{array}\right.\qquad T_2\left\{\begin{array}{ll} 1', & (a\;\,b_t\,c_y d_z),\\ 2', & (a_z b\;\,c_t\,d_x),\\ 3', & (a_t\;\,b_x c\;\,d_y),\\ 4', & (a_y b_z\,c_x d\;\,),\end{array}\right.\qquad T_3\left\{\begin{array}{ll} 1'', & (a_t\,b\;\,c_x d_z),\\ 2'', & (a_y b_t\,c\;\,d_x),\\ 3'', & (a\;\,b_z c_t\,d_y),\\ 4'', & (a_z\,b_x c_y d\;\,),\end{array}\right.$$

et représentons aussi un sommet quelconque par la même notation que la face opposée.

Cela posé, considérons un plan singulier, $(aa_t bb_t cc_t)$ par exemple. Il contient trois centres d'involution en ligne droite, c'est-à-dire trois sommets correspondants des trois tétraèdres. Or, si l'on consulte le Tableau précédent, on voit que chaque face de ces tétraèdres contient deux des six points doubles appartenant au plan considéré, à l'exception des faces 4, 4′, 4″. Les sommets 4, 4′, 4″ sont donc trois sommets correspondants.

Les faces 4, 4′, 4″ ont un sommet commun; cette remarque permet de former rapidement le Tableau suivant :

11′3″,	21′2′,	31′4″,	41′1″,
12′4″,	22′1″,	32′3″,	42′2″,
13′1″,	23′4″,	33′2″,	43′3″,
14′2″,	24′3″,	34′1″,	44′4″.

Si l'on considère les chiffres comme représentant des sommets, trois sommets d'un même groupe sont en ligne droite; si les chiffres représentent des faces, trois faces d'un même groupe se coupent suivant une ligne droite.

On voit ainsi apparaître deux systèmes formés chacun de seize droites : chaque droite du premier système appartient à un plan singulier unique (et l'on a, d'après ce qui précède, le moyen d'établir la correspondance); chaque droite du second système passe par un point double.

Le lecteur pourra de même préciser sans difficulté les correspondances auxquelles donnent lieu les cas de l'involution quadruple et de l'involution sextuple.