NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GIACOMO CANDIDO

Sur un théorème connu

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 170-173

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__170_0>

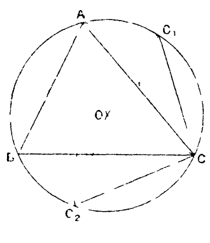
[K2a]

SUR UN THÉORÈME CONNU ;

Par M. Giacomo CANDIDO, à Pise.

Le but de ce petit article est de remarquer comment, par une très simple généralisation du théorème suivant, s'obtiennent quelques autres propositions d'une certaine importance : *Par le sommet* A *d'un triangle* ABC *on mène les perpendiculaires aux côtés* AB, AC, *qui coupent en* D *et en* E *le cercle circonscrit au triangle. Démontrer que le quadrilatère* ADBE (*ou* ADCE) *est équivalent au triangle* ABC (*Nouvelles Annales*, 1884, p. 494) (A).

Considérons le triangle ABC, son cercle circonscrit et les droites AY, BY, CY, conjuguées isogonales de trois



droites quelconques AX, BX, CX par rapport aux trois angles ABC, lesquelles coupent le cercle circonscrit respectivement en A_1, A_2 ; B_1, B_2 ; C_1, C_2. On a alors

$$\widehat{C_1AC_2} = \pi - \gamma - 2\theta, \qquad \widehat{CC_1A} = \pi - \beta, \qquad \widehat{AC_2C} = \beta,$$
$$\widehat{BCA} = \gamma + 2\theta \qquad \left(\theta = \widehat{BCC_2} = \widehat{C_1CA}\right)$$

(on observera que les AX, AY ont été prises internes aux angles, mais il va sans dire que ce serait la même chose si AX, AY étaient externes). De ce qui précède,

$$\widehat{C_1OC} = 2(\beta - \theta), \qquad \widehat{COC_2} = 2(\alpha - \theta),$$
$$\widehat{AOC_1} = 2\theta, \qquad \widehat{AOC_2} = 2(\gamma + \theta).$$

D'après ces formules, on a évidemment

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \text{aire } CC_1AC_2 = \frac{R^2}{2}[&\sin 2\theta + \sin 2(\alpha - \theta) \\ &+ \sin 2(\beta - \theta) + \sin 2(\gamma + \theta)]. \end{aligned}\right.$$

Observons d'abord que la valeur de (1) ne s'altère pas en changeant α avec β, et, par suite, les équivalences suivantes ont lieu en même temps :

$$\begin{aligned} \text{aire } CC_1AC_2 &\equiv CC_1BC_2 = Q_1, \\ \text{aire } AA_1CA_2 &\equiv AA_1BA_2 = Q_2, \\ \text{aire } BB_1CB_2 &\equiv BB_1AA_2 = Q_3. \end{aligned}$$

Écrivons

$$\frac{R^2}{2}[\sin 2\theta + \sin 2(\alpha - \theta) + \sin 2(\beta - \theta) + \sin 2(\gamma + \theta)] = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma;$$

on voit d'abord que cette équation est vérifiée par

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \gamma,$$

ce qui démontre le théorème (A). On observe que la même chose peut se démontrer pour Q_2 et Q_3, et, par conséquent : *Si les isogonalités en* A, *en* B *et en* C *sont respectivement* $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} - \beta$, $\frac{\pi}{2} - \gamma$, *on a*

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = S.$$

Remarques. — I. On voit facilement que la condition d'isogonalité indiquée dans ce théorème conduit à la réduction des points A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, à trois seulement, qui, avec les trois sommets du triangle, nous donnent un hexagone inscrit qui a quelques propriétés remarquables. Par exemple : *Les angles et les côtés de cet hexagone sont respectivement égaux entre eux. Cet hexagone est équivalent au double du triangle fondamental.*

II. *En posant* $A_1A_2 = l_a$, $B_1B_2 = l_b$, $C_1C_2 = l_c$, *il existe une isogonalité particulière pour laquelle, parmi les rectangles* al_a, bl_b, cl_c, *il y en a un équivalent à la somme des deux autres.* Les droites conjuguées isogonales AA_1, AA_2, ... sont en ce cas les hauteurs et les droites qui joignent les sommets du triangle au centre du cercle circonscrit.

Ces deux remarques seront vérifiées aisément par le lecteur.

Rappelons maintenant le théorème suivant : *Si de deux points* X *et* Y *de deux droites conjuguées isogonales par rapport à un angle* BAC *on abaisse des perpendiculaires* XM, YN, XP, YQ *sur les côtés,* MP *est perpendiculaire à* AY *et* NQ *à* AX.

Considérons alors les droites de Wallace (ou de Simson) des points A_1 et A_2, et, par le théorème précédent, on voit facilement que l'angle qu'elles font entre elles (celui-ci opposé à A) est égal à $\pi - A - 2\theta$; d'où cette proposition.

Pour que les deux droites de Wallace des points A_1 *et* A_2 *soient rectangulaires entre elles, il faut que l'isogonalité soit* $\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$.

D'ailleurs, pour cette condition d'isogonalité, on a

$$2\theta + A = \frac{\pi}{2},$$

et ceci nous conduit à la proposition de M. Goffart (*Nouvelles Annales*, 1884, p. 397) : *Les droites de Simson relatives à deux points diamétralement opposés du cercle circonscrit à un triangle donné sont rectangulaires entre elles.*