G. TARRY

Les lignes arithmétiques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 149-155

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__149_1>

[Q4bα]

LES LIGNES ARITHMÉTIQUES;

PAR M. G. TARRY.

Nous allons étudier les restes des termes de la progression arithmétique

$$0, \quad a, \quad 2a, \quad 3a, \quad \ldots$$

de raison a, divisés par b, a et b étant des nombres entiers.

Le nombre des restes différents, y compris zéro, est au plus égal à b, et chaque reste se déduit du précédent en ajoutant à ce dernier le reste de a, et en retranchant b si la somme obtenue est plus grande que b.

Il résulte de là que les restes, ou résidus par rapport au module b, forment une suite périodique dont la période comprend un nombre de termes p, égal ou inférieur à b.

Ces résidus sont évidemment les résidus, tous différents, des p premiers termes

$$0, \quad a, \quad 2a, \quad 3a, \quad \ldots, \quad (p-1)a.$$

Le terme suivant, pa, donne pour résidu zéro, et l'on a

$$pa = qb.$$

On voit que les seuls termes divisibles par b sont

$$0, \quad pa, \quad 2pa, \quad 3pa, \quad \ldots.$$

Le nombre ba, divisible par b, étant compris parmi ces termes,

$$ba = npa,$$

et, en remplaçant ba par son égal qb,

$$ba = nqb.$$

Ces deux égalités se réduisent à

$$b = np, \qquad a = nq.$$

Si a et b sont premiers entre eux, le nombre n qui divise à la fois a et b est égal à l'unité, et dans ce cas particulier

$$p = b.$$

D'où ces conséquences :

Les $(b - 1)$ *premiers multiples d'un nombre entier* a, *premier avec* b, *donnent pour résidus, par rapport au module* b *et dans un certain ordre, les* $(b - 1)$ *premiers nombres.*

Si l'on prolonge indéfiniment la série des multiples, les mêmes résidus se reproduisent dans le même ordre.

Les seuls multiples de a *divisibles par* b *sont* ba, $2ba$, $3ba$, ... En d'autres termes, *lorsqu'un nombre* b *divise le produit de deux facteurs* na *et qu'il est premier avec l'un* a, *il divise l'autre* n.

Quand on augmente tous les termes de la progression arithmétique d'un même nombre entier c, le nombre des résidus différents reste le même. Donc :

Si le nombre n *est premier avec* a, *les* n *termes de la progression arithmétique*

$$c, \quad c+a, \quad c+2a, \quad \ldots, \quad c+(n-1)a,$$

sont respectivement congrus, suivant le module n, *quel que soit l'entier* c, *aux nombres*

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad (n-1),$$

abstraction faite de l'ordre.

Soient

$$r_1, \quad r_2, \quad r_3, \quad \ldots, \quad r_n$$

les résidus respectifs de c, $c+a$, ..., $c+(n-1)a$, par rapport au module n, o étant remplacé par son équivalent n.

Considérons un échiquier de n cases de côté.

Numérotons de 1 à n les rangées (sens horizontal) de haut en bas et les colonnes (sens vertical) de gauche à droite. Dans les rangées 1, 2, 3, ..., n, marquons successivement les cases situées dans les colonnes r_1, r_2, r_3, ..., r_n.

Fig. 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6
9	5	1	10	6	2	11	7	3	12	8	4
10	7	4	1	11	8	5	2	12	9	6	3
8	3	11	6	1	9	4	12	7	2	10	5
11	9	7	5	3	1	12	10	8	6	4	2
2	4	6	8	10	12	1	3	5	7	9	11
5	10	2	7	12	4	9	1	6	11	3	8
3	6	9	12	2	5	8	11	1	4	7	10
4	8	12	3	7	11	2	6	10	1	5	9
6	12	5	11	4	10	3	9	2	8	1	7
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

L'ensemble des cases ainsi marquées est une *ligne arithmétique* de pas a.

Dans l'arithmétique de l'échiquier, la dernière propriété s'exprime sous cette forme :

Sur un échiquier de côté n, *les* n *cases d'une ligne arithmétique de pas* a *sont réparties dans chacune des* n *rangées et chacune des* n *colonnes, lorsque les nombres* n *et* a *sont premiers entre eux.*

Voici les trois propriétés fondamentales des lignes arithmétiques :

I. *Deux lignes arithmétiques de même pas se confondent ou n'ont aucune case commune.*

Cela est évident, puisque dans chaque rangée la différence des numéros d'ordre des cases occupées par la première et la seconde ligne arithmétique demeure congrue à un même nombre, pour le module n.

On dit que deux lignes de même pas ont la *même direction*.

Les n^2 cases d'un échiquier de côté n peuvent être réparties entre n lignes arithmétiques de même direction.

Si dans chaque ligne on porte un même nombre dans toutes les cases, on obtient un *abaque magique*.

Ce mode de répartition trouve son emploi dans la théorie des carrés magiques, diaboliques et cabalistiques.

II. *Deux lignes arithmétiques de pas différents, a et a′*,

$$\begin{array}{lllll} c, & c+a, & c+2a, & \ldots, & c+(n-1)a, \\ c', & c'+a', & c'+2a', & \ldots, & c'+(n-1)a' \end{array}$$

ont une case commune et une seule, lorsque la différence de leurs pas ($a - a'$), *est un nombre premier avec le côté n de l'échiquier.*

Dans les rangées successives

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n,$$

les différences entre les numéros d'ordre des deux cases occupées par les deux lignes arithmétiques sont respectivement égales aux résidus, par rapport au module n, des n termes de la progression arithmétique

$$(c-c'), \quad (c-c')+(a-a'),$$
$$(c-c')+2(a-a'), \quad \ldots, \quad (c+c')+(n-1)(a-a'),$$

dont la raison est un nombre premier avec n.

Et l'on sait que parmi ces résidus il y en a un, et un seul, égal à zéro. La propriété se trouve démontrée.

Les colonnes sont des lignes arithmétiques de pas zéro. Les rangées, qui deviennent des colonnes quand on change le point de vue sont aussi des lignes arithmétiques.

On voit immédiatement que, sur un échiquier de côté n, le nombre des directions différentes est égal à $(n+1)$.

III. *Sur un échiquier dont le côté est un nombre premier n, par deux cases quelconques passe une ligne arithmétique et une seule.*

Sur cet échiquier, la différence des pas de deux lignes arithmétiques est un nombre premier avec le côté, et, par conséquent, deux lignes arithmétiques de pas différents ne peuvent avoir deux cases communes.

D'autre part, par la première case on peut mener $(n+1)$ lignes arithmétiques, une ligne horizontale ou verticale, et n autres qui passent successivement par les n cases de la rangée ou de la colonne dans laquelle se trouve la seconde case; autrement ces deux lignes arithmétiques de pas différents auraient deux cases communes.

Donc, par la première case on peut mener une ligne arithmétique et une seule qui passe par la seconde.

Sur le plan, par deux points passe une ligne droite et une seule, et par un point pris en dehors d'une ligne droite on peut mener une ligne droite, et une seule, qui ne la rencontre pas.

Pareillement, sur l'échiquier de côté premier, par deux cases passe une ligne arithmétique et une seule, et par une case prise en dehors d'une ligne arithmétique on peut mener une ligne arithmétique et une seule qui ne la rencontre pas, la ligne de même pas.

Sur l'échiquier de côté premier n, écrivons les $(n-1)$ premiers nombres entiers dans les $(n-1)$ premières cases de la première rangée, en suivant l'ordre naturel, puis portons le nombre 1 dans les cases de la ligne arithmétique de pas 1 menée par la case 1, le nombre 2 dans les cases de la ligne de pas 2 menée par la case 2, et ainsi de suite jusqu'au nombre $(n-1)$, qui sera mis dans les cases de la ligne de pas $(n - 1)$ menée par la case $(n - 1)$.

Toutes ces lignes arithmétiques aboutissent à la case commune à la dernière colonne et à la dernière rangée; les autres cases de ces dernières lignes sont vides.

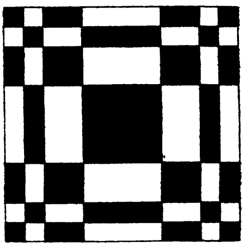
Supprimons ces deux lignes, il reste un échiquier de côté $(n - 1)$ contenant un nombre dans chaque case.

Dans cet abaque, *le produit du nombre d'une case quelconque par le nombre de sa rangée a pour résidu, par rapport au module n, le nombre de sa colonne.*

Ce mode de répartition en lignes arithmétiques concourantes trouve son emploi dans la théorie des nombres premiers.

Formons l'abaque avec des cases noires et blanches, de telle sorte que les cases noires renferment les résidus

Fig. 2.



quadratiques pour le module n, et les cases blanches les résidus non quadratiques.

La disposition des cases noires et blanches dans cette mosaïque, que j'appellerai *échiquier quadratique,* révèle les propriétés principales des résidus quadratiques.