Henri Piccioli

Un théorème de géométrie à *n* dimensions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 132-133

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__132_0>

[Q2]

UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE A n DIMENSIONS;

PAR M. HENRI PICCIOLI.

Il a été démontré que les développantes des hélices cylindriques de l'espace ordinaire jouissent de la propriété caractéristique d'être des courbes planes. On peut chercher si cette propriété se conserve pour les courbes de l'espace à n dimensions; tel est le but de cette Note.

$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}$ étant les cosinus directeurs de la tangente d'une courbe L de l'espace à n dimensions S_n; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées courantes de ses points exprimées par l'arc s, considérons la courbe

$$(1)\quad y_1 = x_1 - s\alpha_{11},\quad y_2 = x_2 - s\alpha_{12},\quad \ldots,\quad y_n = x_n - s\alpha_{1n},$$

qui représente une développante de L, et cherchons quelle doit être la nature de L pour que la courbe (1) appartienne à un espace S_{n-1}.

Il faudra évidemment que l'on ait, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant des constantes,

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \\ &\quad - s(a_1 \alpha_{11} + a_2 \alpha_{12} + \ldots + a_n \alpha_{1n}) = 0. \end{aligned}$$

Différentions, en tenant compte des formules de Serret généralisées par M. Brunel (1); remarquant qu'il

(1) BRUNEL, *Propriétés métriques des courbes gauches dans un espace linéaire à n dimensions* (*Math. Ann.*, B. XIX).

y a $2n$ termes qui se détruisent, on trouve la condition

$$a_1\alpha_{21} + a_2\alpha_{22} + \ldots + a_n\alpha_{2n} = 0,$$

$\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}$ étant les cosinus directeurs de la normale principale de L. Cette condition, comme on le voit facilement, est aussi suffisante.

Or, la ligne L devant avoir ses normales principales perpendiculaires à la direction fixe

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}}, \quad \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}}, \quad \ldots, \quad \frac{a_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}},$$

est une hélice du cylindre obtenu en conduisant de ses points les S_1 parallèles à cette direction.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Parmi les courbes de S_n, il y en a qui ont la propriété que leurs développantes appartiennent à un espace S_{n-1} : ces lignes sont des hélices tracées sur des surfaces cylindriques à deux dimensions dont les génératrices sont perpendiculaires à cet espace S_{n-1}.

Supposons que n soit un nombre impair $2h+1$, et que les $2h$ rayons de courbure de L soient constants. D'après un théorème de M. Brunel, L sera une hélice tracée sur un cylindre ayant pour base une courbe de S_{2h} avec les mêmes $2h-1$ premiers rayons de courbure (à une constante près), c'est-à-dire une courbe placée sur l'hypersphère de S_{2h}. En tenant compte du résultat qui précède, on voit tout de suite que l'on a la proposition que voici :

Les courbes à courbures constantes de l'espace à nombre impair de dimensions ont pour développantes celles des courbes hypersphériques à courbures constantes, bases des cylindres qui les contiennent.