MARIANTONI

PALATINI

Sur le problème de la polysection de l'angle

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 126-131

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__126_0>

[K21b]

SUR LE PROBLÈME DE LA POLYSECTION DE L'ANGLE;

PAR MM. MARIANTONI ET PALATINI, à Sondrio (Italie).

---

1. Si l'on donne dans le plan deux points A et B, et si l'on veut construire le lieu d'un point X tel que l'un des angles que la droite AX fait avec la direction AB soit la $n^{\text{ième}}$ partie de l'un des angles que la droite BX fait avec la direction BA, on obtient entre les faisceaux (A) et (B) une correspondance $(1, n)$, et, en observant qu'un rayon BX de (B) correspond à n rayons de (A), parmi lesquels il y a AB, on peut conclure que *le lieu cherché est une courbe algébrique* C_n, *de degré* n, *qui passe* $n-1$ *fois par* A.

Il est bien facile de démontrer, en raisonnant par l'absurde, que C_n *est une courbe irréductible,* et l'on peut aisément établir son équation.

Si l'on prend le point A pour origine, AB pour axe des x et la perpendiculaire à AB menée par A pour axe des y, et si l'on suppose que le segment AB soit pris pour unité, cette équation est

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \sum (1\,-)^{\frac{n-s}{2}} \dbinom{n}{n-s+1} \left(\dfrac{n+1}{s}x - 1\right) x^{s-1} y^{n-s} = 0 \\[2ex] \qquad\qquad \left[\dbinom{n}{n+1} = 0,\ \dbinom{n}{0} = 1\right]. \end{cases}$$

Dans cette équation, on doit donner à s toutes les valeurs impaires ou paires depuis 0 jusqu'à n (0 et n inclus), selon que n est impair ou pair.

Au rayon BA du faisceau (B) correspondent en (A) les tangentes aux $n-1$ branches de la courbe qui passent par A, et d'après la nature de la correspondance on conclut que *les tangentes aux branches de* C_n *qui passent par* A *sont réelles et distinctes, et qu'elles divisent, avec la droite* AB, *le faisceau* (A) *en* $2n$ *parties égales.*

Les rayons du faisceau (A) qui correspondent à un rayon du faisceau (B) sont tous réels; par conséquent, *les intersections de* C_n *avec les droites réelles qui passent par* B *sont toutes réelles.*

Une ligne droite b qui passe par B rencontre C_n en n points réels qui, avec A, déterminent n droites, lesquelles font, avec la direction AB, des angles dont chacun est la $n^{\text{ième}}$ partie d'un des angles que fait b avec la direction BA. Mais si les intersections d'une courbe irréductible avec les rayons d'un faisceau peuvent être construites par la règle et le compas, la courbe doit être de l'ordre 2^m, lorsque la courbe ne passe pas par le centre du faisceau ([1]); il en résulte que *la polysection d'un angle générique au moyen de la règle et du compas est possible seulement lorsque le nombre des parties est* 2^m, m *étant un nombre entier quelconque.*

En posant, dans (α),

$$y = px + q,$$

nous obtiendrons donc, pour $n = 2^m$, une équation résoluble par radicaux quadratiques.

On peut encore démontrer aisément que *la direction* AB *et les directions des asymptotes de* C_n *menées par un point* X *de* AB *divisent le faisceau* (X) *en* $2(n+1)$ *parties égales.*

([1]) V.-J. PETERSEN, *Om Liguinger der Kunne loses Ned Koadratod* (*Theorie der Algebraischen Gleichungen.* Copenhague, 1878).

La courbe C_n, outre qu'elle passe $n-1$ fois par A, rencontre AB en un point X, tel que

$$AX = \frac{n}{n+1},$$

et C_{n-1}, outre qu'elle passe $n-2$ fois par A, coupe AB en un point Y, tel que

$$AY = \frac{n-1}{n};$$

cela revient à dire que les centres harmoniques du point à l'infini de AB par rapport aux n points, dont $n-1$ sont réunis en A et le $n^{\text{ième}}$ est X, sont $n-1$ points dont $n-2$ sont réunis en A et le $(n-1)^{\text{ième}}$ est Y. De plus, la première polaire de AB par rapport au groupe des tangentes à C_n en A est le groupe des tangentes à C_{n-1} en A, et la première polaire de AB par rapport au groupe des lignes droites menées par un point M de AB, parallèlement aux asymptotes de C_n, est le groupe des lignes droites menées par M parallèlement aux asymptotes de C_{n-1}. Tout cela signifie que C_{n-1} a un point multiple d'ordre $n-2$ en A, et que les tangentes en ce point sont les tangentes de la première polaire Γ du point à l'infini de AB, par rapport à C_n, et qu'elle a en commun avec Γ le point Y et les points à l'infini; et comme ces conditions sont en nombre égal à $\frac{(n-1)(n-1+3)}{2}$, on peut en conclure que C_{n-1} *est la première polaire du point à l'infini de* AB *par rapport à* C_n.

2. Lorsque n est un nombre impair, une des asymptotes est parallèle à l'axe y, et en faisant $x=1$ dans (α), on obtient une équation en y de degré pair, qui contient seulement les puissances paires de la variable,

et, comme une circonférence (et par conséquent un angle droit) est divisible en parties égales au moyen de la règle et du compas, lorsque le nombre des parties est un nombre premier de la forme $2^{2^\mu}+1$, ainsi (en posant dans la dernière équation $y^2=z$) la construction du polygone régulier de $2^{2^\mu}+1$ côtés, lorsqu'elle est possible, dépend de la résolution d'une équation du degré $2^{2^\mu-1}$.

La construction du polygone régulier de 17 côtés dépend de la résolution de l'équation

$$(1)\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\binom{17}{2n}z^n=0,\qquad \left[\binom{17}{0}=1\right],$$

dont les racines, toutes réelles et positives, sont

$$z_i=\operatorname{tang}^2(2i-1)\varphi\qquad \left(i=1,2,\ldots: 8,\ \varphi=\frac{\pi}{34}\right).$$

Si l'on considère la relation

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &2\,\frac{1-\operatorname{tang}^2 K\varphi}{1+\operatorname{tang}^2 K\varphi}\,\frac{1-\operatorname{tang}^2 K_1\varphi}{1+\operatorname{tang}^2 K_1\varphi}\\ &\quad=\frac{1-\operatorname{tang}^2(K+K_1)\varphi}{1+\operatorname{tang}^2(K+K_1)\varphi}+\frac{1-\operatorname{tang}^2(K-K_1)\varphi}{1+\operatorname{tang}^2(K-K_1)\varphi},\end{aligned}\right.$$

et si l'on pose

$$(3)\qquad Z_s=\frac{1-z_s}{1+z_s}\qquad (s=1,2,3,\ldots,8),$$

on peut vérifier aisément que *le double du produit de deux des valeurs de z est égal et de signe contraire à la somme de deux des valeurs de Z, dont une peut être aussi un des facteurs du produit.*

Par exemple, nous avons

$$2Z_3Z_8=-(Z_4+Z_6),\qquad 2Z_1Z_8=-(Z_1+Z_2),\qquad \ldots.$$

On peut encore vérifier que les relations entre les valeurs de z analogues à celles-ci, au nombre de 28, peuvent être groupées en quatre cycles, dont trois contiennent 8 relations chacun et le quatrième n'en contient que 4. C'est ce dernier cycle, le plus simple entre tous, que nous allons écrire

$$
\begin{aligned}
2Z_2Z_3 &= -(Z_5+Z_8) = -a,\\
2Z_5Z_8 &= -(Z_4+Z_6) = -b.\\
2Z_4Z_6 &= -(Z_1+Z_7) = -c,\\
2Z_1Z_7 &= -(Z_2+Z_3) = -d.
\end{aligned}
$$

Évidemment, il suffit de calculer a, b, c, d, car alors Z_2 et Z_3 sont les racines de l'équation

$$M^2 - dM - \frac{1}{2}a = 0, \qquad \ldots;$$

ainsi nous avons toutes les valeurs de Z et, par conséquent, de z. Pour choisir les signes des radicaux, il suffit de se reporter aux relations (3) et aux variations de la tangente trigonométrique.

En posant

$$\sum_1^8 Z_i = K, \qquad Z_r + Z_s = S_{r,s}$$

et ayant égard aux relations (2), on trouve

$$
\begin{aligned}
a+b+c+d &= K,\\
2ab &= -S_{1,8} - S_{3,5} - S_{2,8} - S_{5,7},\\
2bc &= -S_{5,6} - S_{3,4} - S_{2,6} - S_{4,8},\\
2cd &= -S_{7,8} - S_{1,4} - S_{6,7} - S_{1,5},\\
2da &= -S_{3,6} - S_{1,3} - S_{2,7} - S_{2,4}.
\end{aligned}
$$

La somme de ces quatre produits est donc égale à $-4K$; et puisqu'on a

$$ab + bc + cd + da = (a+c)(b+d),$$

en posant

$$a + c = A, \qquad b + d = B,$$

nous avons

$$A + B = K, \qquad AB = -2K.$$

Or K est une fonction symétrique des racines de (1); par conséquent elle est exprimable au moyen des coefficients de cette équation. Si nous appelons Σ_s la somme des produits des racines de (1) s à s, nous pouvons aisément établir que

$$K = \frac{8 + 6\Sigma_1 + 4\Sigma_2 + 2\Sigma_3 - 2\Sigma_5 - 4\Sigma_6 - 6\Sigma_7 - 8\Sigma_8}{1 + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \Sigma_5 + \Sigma_6 + \Sigma_7 + \Sigma_8}$$
$$= \frac{32768}{65536} = \frac{1}{2}.$$

Donc A et B sont les racines de l'équation

$$2\theta^2 - \theta - 2 = 0,$$

et comme on a

$$ac = -K, \qquad bd = -K,$$

ainsi a, c, b, d sont respectivement les racines des équations

$$2\theta^2 - 2A\theta - 1 = 0, \qquad 2\theta^2 - 2B\theta - 1 = 0.$$

Notre équation est désormais résolue au moyen de radicaux quadratiques, car il n'y a pas autre chose à faire qu'à résoudre les équations du deuxième degré que nous avons établies, en tenant compte des signes des radicaux.