Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 94-98

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__94_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1384.

SOLUTION ET GÉNÉRALISATION,

Par M. A. Droz-Farny.

Dans les *Nouvelles Annales* de 1896, page 388, M. H. Brocard a publié une très intéressante solution de la question 1384, proposée par M. Mannheim :

D'un point pris sur une hyperbole équilatère, on mène des parallèles aux asymptotes de cette courbe. Démontrer que les côtés d'un triangle quelconque inscrit dans l'hyperbole déterminent sur ces droites des segments proportionnels.

Dans cette Note, je me propose de donner de ce théorème une démonstration purement géométrique et de prouver que le théorème reste valable pour une hyperbole quelconque.

Soit ABC un triangle inscrit dans une hyperbole H, dont les points à l'infini sont Q et R. D'un point P pris quelconque sur H on mène les parallèles PQ et PR aux asymptotes. En vertu d'une proposition bien connue, les deux triangles PQR et ABC, inscrits dans H, sont circonscrits à une conique qui sera évidemment une parabole, puisqu'elle admet comme tangente la droite à l'infini QR.

Mais on sait que trois tangentes fixes à une parabole déterminent sur toute tangente variable des segments proportionnels à des quantités constantes.

D'où la proposition généralisée de M. Mannheim.

Question 1529.

(1885, p. 152.)

Trois droites, issues de trois sommets d'un triangle, déterminent sur les côtés opposés six segments, tels que la *différence entre le produit de trois segments non consécutifs et le produit des trois autres est*

$$\frac{abc}{a'b'c'}\left(\frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}}\right)^2 lmn;$$

A, a, b, c désignent l'aire et les côtés du triangle donné; A', a', b', c' l'aire et les côtés du triangle formé par les trois droites; l, m, n les segments de ces trois droites compris entre les sommets et les côtés du premier triangle.

CESÀRO.

SOLUTION ET GÉNÉRALISATION,

Par M. FRANCESCO FERRARI.

I. Soient :

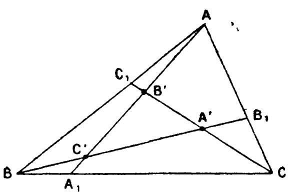
1. A_1, B_1, C_1 points situés respectivement sur les côtés $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ du triangle $ABC = A$;
2. A', B', C' les points d'intersection des couples de droites (BB_1, CC_1), (CC_1, AA_1), (AA_1, BB_1);
3. a', b', c' respectivement les côtés $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ du triangle $A'B'C' = A'$;
4. $AA_1 = l$, $BB_1 = m$, $CC_1 = n$;
5. $\frac{BA_1}{A_1C} = h$, $\frac{CB_1}{B_1A} = p$, $\frac{AC_1}{C_1B} = q$,

d'où

$$(1)\qquad \frac{BC}{BA_1} = \frac{h+1}{h}, \qquad \ldots, \qquad \frac{BC}{A_1C} = h+1, \qquad \ldots;$$

6. $1 + h + hp = \mu_1$, $1 + p + pq = \mu_2$, $1 + q + qh = \mu_3$.

Fig. 1.



Les triangles AA_1C, AA_1B (*fig.* 1), coupés respectivement par les droites BB_1, CC_1, donnent

$$\frac{AC_1}{C'A'}\,\frac{A_1B}{BC}\,\frac{CB_1}{B_1A} = -1, \qquad \frac{AB'}{B'A_1}\,\frac{A_1C}{CB}\,\frac{BC_1}{C_1A} = -1,$$

d'où, en vertu de (1),

$$\frac{AC'}{C'A_1} = \frac{h+1}{hp}, \qquad \frac{AB'}{B'A_1} = q(h+1),$$

et de là

$$\frac{AC'}{AA_1} = \frac{h+1}{\mu_1}, \qquad \frac{AB'}{AA_1} = \frac{q(h+1)}{\mu_3},$$

d'où

$$\frac{a'}{l} = \frac{AC' - AB'}{AA_1} = \frac{(1-hpq)(1+h)}{\mu_3\mu_1}.$$

Par analogie,

$$\frac{b'}{m} = \frac{(1-hpq)(1+p)}{\mu_1\mu_2}, \qquad \frac{c'}{n} = \frac{(1+hpq)(1+q)}{\mu_2\mu_3}.$$

En multipliant

$$(2) \qquad \frac{a'b'c'}{lmn} = \frac{(1-hpq)^3(1+h)(1-p)(1+q)}{\mu_1\mu_2\mu_3}.$$

L'aire du triangle A'B'C' circonscrit à ABC est

$$(3) \qquad \frac{A'}{A} = \frac{(1-hpq)^2}{\mu_1\mu_2\mu_3};$$

donc on a

$$\frac{lmn}{a'b'c'}\left(\frac{A'}{A}\right)^2 = \frac{1-hpq}{(1+h)(1+p)(1+q)},$$

d'où, par (1),

$$A_1C.B_1A.C_1B - BA_1.CB_1.AC_1 = abc\,\frac{lmn}{a'b'c'}\left(\frac{A'}{A}\right)^2.$$

II. Soient :

1. ABCD un tétraèdre;
2. A_1, B_1, C_1, D_1 points situés sur les côtés $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ du quadrangle gauche ABCD;
3. A', B', C', D' respectivement les points d'intersection des trois plans (CDA_1, DAB_1, ABC_1), (DAB_1, ABC_1, BCD_1), (ABC_1, BCD_1, CDA_1), (BCD_1, CDA_1, DAB_1);
4. α', β', γ', α_1, β_1, γ_1 l'aire des triangles A'B'C', B'C'D', C'D'A', D'A'B', ABC_1, BCD_1, CDA_1, DAB_1:
5. A, A' les volumes des tétraèdres ABCD, A'B'C'D':
6. $\dfrac{AA_1}{A_1B} = h$, $\dfrac{BB_1}{B_1C} = p$, $\dfrac{CC_1}{C_1D} = q$, $\dfrac{DD_1}{D_1A} = r$.

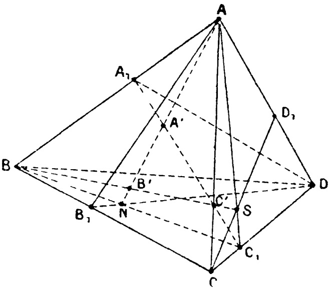
d'où

$$(4)\qquad \frac{AB}{AA_1} = \frac{h+1}{h}, \qquad \ldots, \qquad \frac{AB}{A_1B} = h+1, \qquad \ldots;$$

7. $1 + h + hp + hpq = \mu_1$, $\quad 1 + p + pq + dqr = \mu_2$,
$\quad 1 + q + qr + qrh = \mu_3$, $\quad 1 + r + rh + rhp = \mu_4$;

8. N le point d'intersection des droites BC_1, DB_1, et S celui des droites AC_1, CD_1.

Fig. 2.



Des triangles BCC_1, DAC_1 (*fig.* 2), coupés respectivement par les droites DB_1, CD_1, on a

$$\frac{BN}{NC_1}\,\frac{C_1D}{DC}\,\frac{CB_1}{B_1B} = -1, \qquad \frac{C_1S}{SA}\,\frac{AD_1}{D_1D}\,\frac{DC}{CC_1} = -1,$$

d'où, en vertu de (4),

$$(5)\qquad \frac{BN}{NC_1} = p(q+1), \qquad \frac{C_1S}{SA} = \frac{rq}{q+1}.$$

Or le triangle $A'B'C'$ est circonscrit au triangle ABC_1, et ses côtés $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ rencontrent les côtés BC_1, C_1A, AB de ABC_1 respectivement aux points N, S, A_1, et de là, en appliquant la formule (3) et ayant égard aux valeurs (5), on trouve

$$\frac{\alpha'}{\alpha_1} = \frac{(1-hpqr)^2(q+1)}{\mu_1\mu_2\mu_3}.$$

Par analogie,

$$\frac{\beta'}{\beta_1} = \frac{(1-hpqr)^2(r+1)}{\mu_2\mu_3\mu_4}, \qquad \frac{\gamma'}{\gamma_1} = \frac{(1-hpqr)^2(h+1)}{\mu_3\mu_4\mu_1},$$

$$\frac{\delta'}{\delta_1} = \frac{(1-hpqr)^2(p+1)}{\mu_4\mu_1\mu_2}.$$

En multipliant

$$\frac{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}{\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1} = \frac{(1-hpqr)^8(h+1)(p+1)(q+1)(r+1)}{\mu_1^3\mu_2^3\mu_3^3\mu_4^3},$$

le volume du tétraèdre A'B'C'D', dont les faces passent par les côtés AB, BC, CD, DA du quadrangle ABCD et rencontrent respectivement les côtés opposés en C_1, D_1, A_1, B_1 est

$$\frac{A'}{A} = \frac{(1-hpqr)^3}{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}. \tag{6}$$

Donc on a

$$\frac{\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1}{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}\left(\frac{A'}{A}\right)^3 = \frac{1-hpqr}{(h-1)(p+1)(q-1)(r+1)},$$

d'où, en vertu de (4),

$$A_1B.B_1C.C_1D.D_1A - AA_1.BB_1.CC_1.DD_1$$
$$- abcd\frac{\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1}{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}\left(\frac{A'}{A}\right)^3.$$

Remarque. — Les formules (3), (6) se déduisent aisément des formules de l'aire du triangle et du volume du tétraèdre en coordonnées segmentaires ou en coordonnées barycentriques.